Алгебра 2-1

1. Всегда ли нормальная подгруппа является ядром некоторого гомоморфизма?

2. Опишите все группы порядков 2, 3, 4, 5, 6. Какие из них просты? Какие разрешимы? Для разрешимых опишите все нормальные делители.

3. Докажите что группа порядка p^n, p - простое а $n > 1$ не может быть простой.

4. Рассмотрим множество $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ из восьми элементов. Определим умножение формулой

$$1 \times x = x \times 1 = x, i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j, j \times i = -k, k \times j = -i,$$

$$i \times k = -j, (\epsilon_1 x) \times (\epsilon_2) y) = (\epsilon_1 \epsilon_2) x \times y, \epsilon_l = \pm.$$

Докажите, что это группа. Она называется кватернионной группой. Кстати, это умножение, продолженное по линейности на множество выражений вида $a + bi + cj + dk$ задает кольцо. Докажите что это поле.

5. Опишите все группы порядка 8. Какие у них нормальные подгруппы?

6. Пусть p - простое. Напомним, что $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ – поле. Вычислите порядок группы $GL_2(\mathbb{F}_p)$ обратимых матриц 2×2 над этим полем. Вычислите порядок группы $SL_2(\mathbb{F}_p)$ матриц с определителем единица.