Алгебра 2-2

1. Докажите что группа перестановок из 3 элементов $\mathfrak{S}_3$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z}/3$.

2. Докажите что группа перестановок из 3 элементов $\mathfrak{S}_3$ изоморфна линейной группе $GL(2, \mathbb{F}_2)$ обратимых 2×2 матриц над полем $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

3. Докажите что множество обратимых $(n+1) \times (n+1)$ матриц над полем k вида

$$\begin{pmatrix} A & x \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A \text{ – матрица } n \times n \text{ а } x \text{ – столбец высоты } n$$

образуют группу. Докажите что эта группа является полупрямым произведением линейной группы $GL(n, k)$ обратимых $n \times n$ матриц над полем k и n-мерного векторного пространства k^n рассматриваемого как группа по сложению.

4. Постройте "естественный" гомоморфизм из группы перестановок из 4 элементов $\mathfrak{S}_4$ на группу перестановок из 3 элементов $\mathfrak{S}_3$. Вычислите его ядро. Иногда оно называется четверной группой Клейна $\mathfrak{V}_4$.

5. Докажите что группа $\mathfrak{S}_4$ изоморфна полупрямому произведению $\mathfrak{V}_4$ и $\mathfrak{S}_3$.