Алгебра 2-5

1. Поле деления круга K_N – это поле разложения кругового многочлена Φ_N над $\mathbb{Q}$. Опишите это поле явно и вычислите его группу Галуа над $\mathbb{Q}$.

2. Пусть a не является N-ой степенью в $\mathbb{Q}$. Докажите что многочлен $X^N - a$ неразложим. Найдите его поле разложения и вычислите группу Галуа этого расширения.

3. Пусть a не является N-ой степенью в поле деления круга K_N. Докажите что многочлен $X^N - a$ неразложим. Найдите его поле разложения и вычислите группу Галуа этого расширения над K_N.

В дальнейшем предполагается что все расширения сепарабельны.

4. Пусть $K \subseteq \Sigma$ – нормальное расширение и L-промежуточное поле $K \subseteq L \subseteq \Sigma$. Скажем что L' – сопряжено L если $L' = \tau(L)$, $\tau \in \mathrm{Gal}(\Sigma/K)$. Найдите связь между $\mathrm{Gal}(\Sigma/L)$ и $\mathrm{Gal}(\Sigma/L')$.

5. Пусть $K \subseteq \Omega$- расширение полей, а Σ и Δ – промежуточные конечные расширения $K \subseteq \Sigma \subseteq \Sigma$, $K \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$. Докажите что существует и единственно наименьшее поле, содержащее и Σ и Δ. Оно называется *композитом* полей Σ и Δ и обозначается $\Sigma\Delta$.

6. В условиях предыдущей задачи и предположении что Ω нормально найдите подгруппы $\mathrm{Gal}(\Omega/K)$ отвечающие $\Sigma\Delta$ и $\Sigma \cap \Delta$.

7. В условиях задачи 5. пусть Σ нормально над K. Докажите что $\Sigma\Delta$ нормально над Δ. Что можно сказать о соответствующей группе Галуа?