## Алгебра 2-6

1. Отбражение (как групп) группы $G$ в группу неулевых элементов поля $K$ (как группу по умножению) называется *характером* (в теории чисел иногда это называется квазихарактером). Определите на множестве характеров структуру группы. Докажите что различные характеры *линейно независимы*:

$$\sum_i \lambda_i \chi_i(g) = 0 \text{ для всех } g, \lambda_i \in K \Rightarrow \lambda_i = 0$$

2. Пусть $\sigma_i : L \to \Sigma$ - различные вложения поля $K$ в поле $\Sigma$. Докажите что они линейно независимы:

$$\sum_i \lambda_i \sigma_i(a) = 0 \text{ для всех } a \in K, \lambda_i \in \Sigma \Rightarrow \lambda_i = 0$$

Пусть характеристика поля $K$ взаимно проста с $N$. Предположим что $K$ содержащит корни из 1 $N$ой степени. Пусть $\Sigma$ – циклическое расширение Галуа $K$ степени $N$ (то есть расширение Галуа с циклической группой Галуа $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$). Пусть $\sigma$ – образующая группы Галуа и $\zeta$ – примитивный корень из 1. Сопоставим элементу $\alpha \in \Sigma$ его *резольвенту Лагранжа*:

$$(\zeta, \alpha) = \alpha + \zeta\sigma(\alpha) + \zeta^2\sigma^2(\alpha) + \cdots + \zeta^{N-1}\sigma^{N-1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{N-1} \zeta^i \sigma^i(\alpha)$$

3. Докажите что найдется $\alpha$ такое что его резолвента Лагранжа не равна нулю.

4. Вычислите действие $\sigma$ на $(\zeta, \alpha)$. Покажите что $(\zeta, \alpha)^N \in K$.

5. Докажите что $\Sigma$ изоморфно присоединению к $K$ корня $N$-ой степени из некого элемента $a \in K$.

Положим (как во второй части предыдущей лекции) что $\Sigma = L(t_1, \cdots t_N)$ – поле рациональных функций от $t_1, \cdots t_N$ а $K$ – поле инвариантов относительно естественного действия симметрической группы $\mathfrak{S}_N$. $K \subset \Sigma$ – расширение Галуа с группой $\mathfrak{S}_N$.

6. Найдите подполе $\Sigma$ соответствующее в силу основной теоремы теории Галуа знакопеременной подгруппе $\mathfrak{A}_N$.

7. Найдите подполе $\Sigma$ соответствующее в силу основной теоремы теории Галуа подгруппе $\mathfrak{S}_k$, $k < N$ и $\mathfrak{S}_k$ вложено в $\mathfrak{S}_N$ как перестановки первых $k$ элементов.

8. Найдите выражение для корня уравнения $x^3 + s_1x^2 + s_2x + s_3$ в радикалах.