Алгебра 2-8

1. Рассмотрим кольцо $Mat_n(K)$ $n \times n$ матриц с элементами из поля K. Докажите что умножение матрицы на столбец определяет структуру $Mat_n(K)$-модуля на пространстве столбцов. Что можно сказать о аналогичной операции со строками вместо столбцов?

2. Докажите что $Mat_n(K)$-модуль столбцов циклический и найдите соответствующий левый идеал.

3. Обозначим через $\mathfrak{D}$ кольцо дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами над полем K:

$$D = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\partial^i; f_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i} a_{ij}x^j, \text{ с законом композиции } \quad \partial \circ x = x\partial + 1.$$

Сопоставим так записанному (т.е. ∂ стоит *после* x) многочлен (символ оператора) $F = \sum a_{ij}x^j\lambda^i$. Попробуйте найти явно формулу для символа композиции двух общих операторов в терминах их символов.

4. Определим действие $\mathfrak{D}$ на пространстве многочленов от x правилом $\partial \to \frac{d}{dx}$, x действует умножением на x. Докажите что получается циклический $\mathfrak{D}$-модуль, найдите соответствующий левый идеал.

5. Определим действие $\mathfrak{D}$ на пространстве многочленов от λ правилом $x \to -\frac{d}{d\lambda}$, ∂ действует умножением на λ. Докажите что получается циклический $\mathfrak{D}$-модуль, найдите соответствующий левый идеал.

6. Рассмотрим действие $\mathfrak{D}$ на пространстве выражений $\exp(p(x))f(x)$ где $p(x)$ –*фиксированный* многочлен, а $f(x)$ пробегает пространство всех многочленов. Докажите что получается циклический $\mathfrak{D}$-модуль, найдите соответствующий левый идеал.

Модуль называется неприводимым если в нем нет нетривиальных подмодулей.

7. Когда абелева группа является неприводимым $\mathbb{Z}$-модулем?

8. Являются ли модули из задач 3 и 4 неприводимыми?

9. Докажите что неприводимый модуль цикличен и соответствующий ему левый идеал максимален.