Задачи к курсу "Математический анализ (2 семестр)"

14 февраля 2008 г.

1. Вычислите дифференциалы отображений: а) $(x, y, z) \mapsto x^k y^l z^m$;

б) $det : Mat_{nn} \to \mathbb{R}$;

в) $tr : Mat_{nn} \to \mathbb{R}$;

г) $Mat_{nn} \to \mathbb{R}^n$, заданное коэффициентами характеристического многочлена;

д) $GL_n \to Mat_{nn}, M \mapsto M^{-1}$, где $GL_n \subset Mat_{nn}$ – подмножество невырожденных матриц;

е) $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto B(x, y)$, где $B(x, y)$ – произвольная билинейная форма.

2. Вычислите дифференциал df до и после замены переменных и убедитесь, что они совпадают. Подставьте вектор (1, 1, 1) в точке (3, 4, 5) до замены и его образ - после замены.

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y) + xy; x(u, v) = u^2 - 8v^7; y(u, v) = u^4 v^3;$$

3. Как изменяется градиент (вектор частных производных) при замене координат? При линейной замене? При ортогональной замене?

4. Постройте функцию, у которой: а) существуют в нуле все производные по направлениям, но которая не дифференцируема;

б) существуют всюду все частные производные, но которая не дифференцируема;

в) во всех точках существуют производные по всем направлениям, но которая не дифференцируема в начале координат; г) Может ли функция из пункта в) быть недифференцируемой всюду?

5. Разложите в ряд Тейлора с точностью до членов третьего порядка $\sin(x \cos y)$.

6. Пусть C – открытая область в $\mathbb{R}^n$, не содержащая начала координат, и $\forall P \in C, \forall \lambda > 0, \lambda P \in C$. Функцию $f : C \to \mathbb{R}$ назовём однородной степени $m\,(m \in \mathbb{R})$, если $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n), \forall \lambda > 0$. Докажите, что дифференцируемая в C функция f является однородной степени m тогда и только тогда когда выполняется тождество Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf$$

7. а) Проверьте, что оператор Лапласа $\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ определён инвариантно относительно ортогональных преобразований координат в $\mathbb{R}^m$;

б) Выразите оператор Лапласа на плоскости в полярных координатах;

в) Выразите оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$ в сферических координатах.

8. Пусть функция f дифференцируема в некоторой области $C \subset \mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ для некоторого i. Верно ли, что f не зависит от x_i?

9. Приведите пример замены координат, после которой дифференциал функции

$$\sin(e^{x+y} - 1) + \sin(e^{x+y} + 1)$$

будет иметь более простой вид.