Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.
Листок N 10, 16 апреля 2008 года.

1. Докажите, что следующие три свойства дифференциальной формы первой степени ω на поверхности X равносильны:
а) интегралы ω по любым двум путям с общим началом и концом равны;
б) интеграл ω по любой петле равен нулю;
в) форма ω точна.
2. Пусть ω – замкнутая дифференциальная форма первой степени на некоторой поверхности, а γ_1 и γ_2 два пути, гладко гомотопных, как пути с общим началом и концом. Докажите, что $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.
3. Докажите, что дифференциальная форма первой степени локально точна тогда и только тогда, когда она замкнута.
4. Докажите, что определённая в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ форма

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

замкнута, но не точна.
5. Определим элемент площади поверхности dS как $|\overline{x}_u \times \overline{x}_v| du \wedge dv$, где $\overline{x} = \overline{x}(u, v)$ – параметрическое задание поверхности. Пусть $\overline{e}_n$ – такая нормаль к поверхности, что $(\overline{x}_u, \overline{x}_v, \overline{e}_n)$ – правая тройка. Доказать, что $\overline{e}_n dS = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$.
6. Доказать векторную формулу $\iint\limits_{\partial V} f\overline{e}_n ds = \iiint\limits_{V} (grad\, f) dv$, где f – функция. Вывести из нее закон Архимеда.
7. Открытое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовём звёздным, если вместе с любой точкой $x \in A$ оно содержит весь отрезок $[0, x]$. Пусть

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \omega_{i_1, \ldots, i_l}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

некоторая дифференциальная форма, определённая на множестве A. Определим форму $I\omega$ следующим равенством

$$I\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int\limits_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1, \ldots, i_l}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}.$$

а) Докажите, что $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$;
б) Докажите, что любая замкнутая форма в A является точной.