Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.
Листок N 2, 20 февраля 2008 года.

1. Пусть в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$ функция f имеет частные производные, непрерывные в этой точке. Докажите, что f дифференцируема в точке x.
2. Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $p \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)$.
3. Докажите, что смешанные частные производные в 0 функции $xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (доопределённой в нуле нулём) существуют и различны.
4. Пусть функция f дважды дифференцируема в точке 0 и $f'(0) = 0$. Докажите, что а) 0 является точкой экстремума, если матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ знакоопределена; б) 0 не является точкой экстремума, если в сигнатуре матрицы $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ есть как плюсы, так и минусы. в) Можно ли что-то сказать, если матрица либо неотрицательно определена, либо неположительно определена?
5. Пусть функция f дважды дифференцируема в выпуклой области $U \subset \mathbb{R}^n$, и всюду в ней матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ неотрицательно определена. Докажите, что f выпукла в U.
6. С помощью вогнутости функции $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ в некоторой области покажите, что сумма синусов углов остроугольного треугольника больше 2.
7. Исследовать на экстремум следующие функции
а) $xy\ln(x^2+y^2)$;
б) $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;
в) $(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.
8. Найти точные верхнюю и нижнюю грани функции $(x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$ в области $x, y, z > 0$.
9. Существует ли дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что её ограничение на любую прямую, проходящую через 0 имеет строгий локальный минимум в 0, но сама функция не достигает строгого локального минимума в 0?
10. Пусть f это а) гладкая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) гладкая функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Известно, что 0 – точка строгого локального минимума функции f и её единственная критическая точка. Обязательно ли 0 является точкой глобального минимума функции f?
11. Построить дифференцируемую функцию от двух аргументов, у которой множество критических точек образует 1-сеть, но нет экстремумов.