Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.

Листок N 4, 5 марта 2008 года.

1. Нарисуйте следующие кривые и найдите их особые точки:
а) $y^2 = x^3$;
б) $x^3 + y^3 = 2xy$;
в) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100$.

2. (Зонтик Уитни) Нарисуйте поверхность, заданную уравнением $x^2 = zy^2$, и найдите её особые точки.

3. Докажите, что следующие множества являются гладкими поверхностями в $Mat_{nn}(\mathbb{R})$, найдите их размерности и касательные пространства в единичной матрице: а) $SL(n)$; б) $O(n)$; в) $Sp(n)$.

4. Докажите, что $U(n) \subset Mat_{nn}(\mathbb{C})$ является гладкой поверхностью. Найдите её размерность и касательное пространство в единичной матрице.

5. Пусть A – симметричная вещественная матрица. Рассмотрев максимум соответствующей квадратичной формы на единичной сфере, докажите, что A имеет собственный вектор.

6. Докажите, что диагональ прямоугольного параллелепипеда, описанного вокруг фиксированного эллипсоида, не зависит от параллелепипеда.

7. Докажите, что множество матриц из $Mat_{nm}(\mathbb{R})$ постоянного ранга $r \leq \min(n, m)$ является гладкой поверхностью, и найдите её размерность.

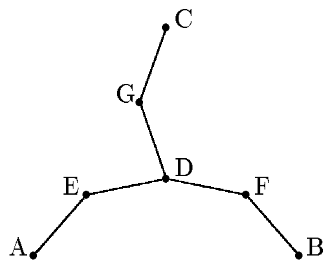
8. Рассмотрим подмножество матриц в Mat_{nn} с фиксированным типом жордановой нормальной формы. Является ли это подмножество гладкой поверхностью?

9. Докажите, что отображение $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, заданное формулой

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0^2}{A}, \ldots, \frac{x_n^2}{A}, \frac{x_0 x_1}{A}, \frac{x_0 x_2}{A}, \ldots, \frac{x_{n-1} x_n}{A} \right),$$

где $A(x_0, \ldots, x_n)$ – положительно определённая квадратичная форма, является гладким вложением.

10. Рассмотрим следующую механическую систему



Точки A, B, C неподвижны и закреплены в вершинах равностороннего треугольника. Точки D, E, F, G подвижны, но соединены друг с другом равными жёсткими стержнями, изображёнными на рисунке. Возможные положения этих точек образуют некоторое подмножество в $\mathbb{R}^8$. Докажите, что это подмножество
а) является гладкой двумерной поверхностью и
б) диффеоморфно двумерной сфере.