Математический анализ, 2 семестр, 1 курс, 2008 год

Листок 7, 26.03.2008

1. Является ли интегрируемой функция Римана ($R(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}, (p, q) = 1; R(\alpha) = 0, \alpha \notin \mathbb{Q}$)?

2. Какое максимальное значение интеграла по отрезку $[0; 1]$ интегрируемой по Риману функции, принимающей во всех рациональных точках значение 0 и ограниченной сверху числом 1?

3. а) Пусть ряд из интегрируемых по Риману функций сходится равномерно на отрезке. Верно ли, что его сумма интегрируема?

б) Тот же вопрос для ряда, сходящегося поточечно.

4. а) Найдите достаточное условие, при котором объём тела вращения выражается через его проекцию на ось вращения и площади трёх сечений — в границах проекции и посередине. Вычислите с его помощью объёмы шарового слоя и усечённого конуса.

б) Можно ли его обобщить так, чтобы найти с его помощью объём усечённой пирамиды?

5. Рассмотрим числа, которые можно описать как значения в нуле функций, заданных при помощи арифметических операций, элементарных функций, константы 1 и понятия обратной функции (в частности, x, такое что $x + \ln x$ равно наименьшему вещественному корню уравнения $x^5 + x + 1 = \sin x$, так описывается). Для каждого такого числа рассмотрим минимальную длину (в символах) такого описания. Рассмотрим функцию, которую каждому описываемому числу сопоставляет единицу, делённую на минимальную длину описания, а остальным числам сопоставляет 0. Докажите, что она интегрируема по Риману на любом отрезке.