Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.
Листок N 8, 2 апреля 2008 года.

1. Если E_i – исчерпание измеримого множества E, то $\lim\limits_{i\to\infty} vol(E_i) = vol(E)$.

2. Если E_i – исчерпание измеримого множества E и функция f интегрируема на E, то ограничения $f|E_i$ интегрируемы при каждом i и $\int\limits_E f\,dx = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f\,dx$.

3. Постройте пример не интегрируемой (в несобственном смысле) функции, для которой существует интеграл в смысле главного значения.

4. Доказать для несобственных интегралов свойства линейности и аддитивности по отношению к области интегрирования.

5. Докажите, что для несобственных равномерно по параметру сходящихся интегралов справедливы теоремы о предельном переходе и дифференцировании под знаком интеграла. В последнем случае потребовать также равномерной сходимости интеграла $\int\limits_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

6. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции $I(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx$ при $y=0$?

7. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta)d\theta \quad (a>1)$.

8. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx \quad (|r|<1)$.

9. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Определим функцию $F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x+t)dt$. Докажите, что $F \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ и вычислите её производную.

10. Определим функции $\mathbf{E}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi, \quad \mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ при $0<k<1$.
а) Выразите производные $\frac{d\mathbf{E}}{dk}$ и $\frac{d\mathbf{K}}{dk}$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$;
б) Докажите, что

$$\mathbf{E}(k)\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2}) + \mathbf{E}(\sqrt{1-k^2})\mathbf{K}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2}) = const;$$

в) Найдите эту константу.

11. Разложением в ряд вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x)dx$.

12. а) Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
б) Что получится, если разложить $\arcsin x$ в ряд Тейлора и проинтегрировать полученный ряд почленно?