Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.
Листок N 9, 9 апреля 2008 года.

1. Пусть функции $f_t(x)$ и $g_t(x)$ определены на промежутке $[a,\infty)$. Пусть $f_t(x)$ интегрируема по x на любом отрезке $[a,A]$, а $g_t(x)$ монотонно возрастает. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\infty f_t(x)dx$ сходится равномерно относительно параметра t, а $g_t(x)$ равномерно ограничена, то интеграл $\int\limits_a^\infty f_t(x)g_t(x)dx$ сходится равномерно.
2. Исследуйте на равномерную сходимость на промежутке $[0,\infty)$ интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x+a}}{x^2}dx$.
3. Исследуйте на дифференцируемость на интервале $(0,\infty)$ функцию $f(a) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x+1}}dx$.
4. Используя равенство $\frac{1}{x} = \int\limits_0^\infty e^{-xy}dy$, вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.
5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx$.
6. Вычислите интегралы $u = \int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2dx$ и $v = \int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2dx$ $(a>0, b\geq 0)$.
7. Вычислите интегралы Френеля $\int\limits_0^\infty \cos x^2dx$ и $\int\limits_0^\infty \sin x^2dx$.
8. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(4x^2+\pi^2)\operatorname{sh} x}dx$ (Указание: рассмотрите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{(4x^2+\pi^2)\operatorname{sh} x}dx$).
9. Докажите, что при $\varepsilon\to +0$
а) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^{1+\varepsilon}}dx \sim \frac{1}{2\varepsilon}$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^\varepsilon}dx \sim \frac{\pi}{2}\varepsilon$.
10. Докажите, что при $\varepsilon\to +0$
а) $\int\limits_0^1 x^{\varepsilon x}dx = 1-\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{27}+O(\varepsilon^3)$; б) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}}dx = 1-2\varepsilon-\varepsilon^2\ln\varepsilon+O(\varepsilon^2)$.
11. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln x dx$.
12. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\pi(x)}{x^3-x}dx$, где $\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x.