Анализ, 1 курс 2 семестр, функции многих переменных

Лекция 1. Дифференцируемость и дифференциал.

Определение частных производных и теорема о перестановочности частных производных k-ого порядка в случае непрерывности производных $(k+1)$-ого порядка даны на предыдущей лекции. Предполагается известной также теорема о дифференцируемости при непрерывности первых производных.

1. Дифференцируемость и касательное отображение

Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ есть $o(h)$ при $h \to 0$, где $h \in \mathbb{R}^n$, если $\dfrac{\varphi(h)}{||h||} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Определение. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x, если $f(x+h) = f(x) + A(x)h + o(h)$ при $h \to 0$, где $A(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор (производная, вариация, касательное отображение).

Лемма 1.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big(= \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\Big) \tag{1}$$

Доказательство. При $h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$ имеем

$$f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = A_i(x)h_i + o(h_i),$$

где A_i — i-й столбец матрицы $A(x)$. По определению $A_i(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Что и требовалось доказать. □

Определение. Матрица $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^{(i=1,\dots,m)}_{(j=1,\dots,n)}$ (другая запись $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$) называется *матрицей Якоби*, а ее определитель при $m = n$ — *якобианом* отображения f. В частном случае $m = 1$, то есть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, матрица Якоби называется *градиентом* функции f.

2. Цепное правило (формула дифференцирования сложной функции)

Теорема 1. *Пусть дана цепочка дифференцируемых отображений $\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m_u \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^k$, где φ дифференцируема в окрестности $x \in \mathbb{R}^n$, ψ — в окрестности $u = \varphi(x)$ и $f = \psi \circ \varphi$ — их композиция. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \dfrac{\partial f}{\partial u_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) = \psi(\varphi(x+h)) - \psi(\varphi(x)) = \\
= \psi(\varphi(x) + A_\varphi(x)\cdot h + o(h)) - \psi(\varphi(x)) = \\
= \psi(\varphi(x)) + A_\psi(\varphi(x))(A_\varphi \cdot h + o(h)) - \psi(\varphi(x)) = \\
= A_\psi(\varphi(x))A_\varphi(x)\cdot h + A_\psi(\varphi(x))o(h)
\end{aligned}$$

Так как в каждой точке A_ψ — конечномерный, а следовательно ограниченный оператор, то $A_\psi(\varphi(x))o(h) = o(h)$. По определению и по лемме 1

$$A_f(x) = A_\psi(\varphi(x))A_{\varphi(x)} = \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial u_j}\right)_{u=\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Это по существу и есть утверждение теоремы. □

Рассмотрим дифференцируемую функцию $f\colon \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$. Пусть $x_i = \gamma_i(t)$ —произвольная кривая, такая что $\gamma_i(0) = x_i$, $\left(\dfrac{d\gamma_i}{dt}\right)_{t=0}$ — касательный вектор к ней $(i = 1, \dots, n)$.

Лемма 2. *Выражение* $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{d\gamma_j}{dt}\right)_{t=0}$ *определяет линейный функционал на пространстве касательных векторов, инвариантный относительно замен координат* $x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. По цепному правилу

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\frac{du_k}{dt}.$$

Значит

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{d\gamma_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\right)\frac{du_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{du_k}{dt}\ . \tag{3}$$

Подставляя $t = 0$, получим требуемое. □

Определение. Линейный функционал, определяемый леммой 2, называется дифференциалом функции f в точке x и обозначается df.

В частном случае функции $x_i = x_i(x_1, \ldots, x_n)$, сопоставляющей набору $(x_1, \ldots, x_n)$ его i-ю координату, мы имеем:

$$dx_i(\gamma'(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\frac{d\gamma_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\frac{d\gamma_j}{dt} = \ \frac{d\gamma_i}{dt}\ . \tag{4}$$

Поэтому (см. определение, данное в лемме 2)

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \tag{5}$$

Теорема 2.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i$$

для любой замены (эквивалентна лемме 2).

3. Свойства дифференциала

Теорема 3.

$$\begin{aligned}
&d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2 \\
&d(\lambda f) = \lambda df \\
&d(fg) = (df)g + f \cdot dg \quad \textit{(правило Лейбница)} \\
&d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(df)g - f \cdot dg}{g^2}
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, например, правило Лейбница.
$\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} g + f \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ (для производных функций одной переменной мы это знаем). Таким образом,

$$d(fg) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} dx_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) g + f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} = (df)g + f(dg). \tag{6}$$

□

4. Производная по направлению

Определение. Пусть $n \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial n} \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tn) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + tn)\bigg|_{t=0}, \tag{7}$$

где f— функция.

Теорема 4. $\dfrac{\partial f}{\partial n} =< df, n >= (grad\, f, n)$*, где* $< \quad , \quad >$ *— значение линейного функционала на векторе,* $(\quad , \quad)$ *— скалярное произведение двух векторов.*

Доказательство. Поскольку оператор $A(x)$ в определении дифференцируемого отображения представляется Якобиевой матрицей, а последняя для функций равна $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$, имеем

$$f(x + tn) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tn_i) + o(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} n_i\right) t + o(t)\ .$$

Из этого очевидным образом вытекают оба утверждения теоремы. Что и требовалось доказать. □

5. Формула Тейлора

Пусть f имеет непрерывные частные производные до порядка N включительно на открытом выпуклом множестве X и $x \in X$. Обозначение: $f \in C^N(X)$.

Пусть h таково, что $x + h \in X$. Тогда $x + th \in X \, \forall t \in [0, 1]$. Положим $\varphi(t) = f(x + th)$.

Лемма 3.

$$\varphi^k(0) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}, \dots, \partial x_{i_k}} h_{i_1} \dots h_{i_k}. \tag{8}$$

Доказательство. По индукции.

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+th)}{\partial x_i} h_i \text{ (цепное правило), и } \varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i; \tag{9}$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \text{ (цепное правило), и } \varphi''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j. \tag{10}$$

Общий шаг индукции ничем не отличается. □

Теорема 5 (формула Тейлора)**.** *Пусть $f \in C^{N+1}(X)$. Тогда*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_k}} h_{i_1} \dots h_{i_k} + O\left(h^{N+1}\right).$$

(под $O(h^{N+1})$ понимается сумма мономов степени $N+1$ от $h_1, \dots, h_n$) с коэффициентами, вообще говоря зависящими от h.

Доказательство. По формуле Тейлора для функции φ (одной переменной t) имеем:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \varphi^k(0) + \varphi^{(N+1)}(\theta), \text{ где } 0 < \theta < 1 .$$

Ввиду леммы 3 это дает требуемый результат (приращение аргумента равно 1, поэтому его степеней не видно в формуле). □