Лекция 10. Сферические функции Лапласа

A — пространство полиномов от x_1, x_2, x_3,
A_m — подпр-во однор. пол. степени m, тогда
$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$.

Эрмитово произведение:

$$(x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, x_1^{k_1'} x_2^{k_2'} x_3^{k_3'}) = k_1!\, k_2!\, k_3!\, \delta^{k_1 k_1'} \delta^{k_2 k_2'} \delta^{k_3 k_3'}.$$

Лемма 1. Оператор умножения на функцию $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ сопряжены.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\frac{\partial}{\partial x_1} = (x_1)^*$, т.е. $(x_1 u, v) = (u, \frac{\partial}{\partial x_1} v)$. Проверим это на базисных u, v. Пусть $u = x_1^{k_1 - 1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$, $v = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. Тогда с обеих сторон получим $k_1!\, k_2!\, k_3!$. В остальных случаях с обеих сторон нули. $\rfloor$

Элементы пространства $H = \{a \in A \mid \Delta a = 0\} = \ker \Delta$ называются гармоническими полиномами. Положим $H_m = H \cap A_m$.

Лемма 2. $A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$ (ортог. прямая сумма).

Доказательство. ~~Ситхабогоопер~~

$A_m = (\ker \Delta \oplus (\ker \Delta)^\perp) \cap A_m = (\ker \Delta \cap A_m) \oplus ((\ker \Delta)^\perp \cap A_m)$.
По опр. $\ker \Delta \cap A_m = H_m$. $(\ker \Delta)^\perp = \operatorname{Im} \Delta^*$ (что верно для любого оператора) $= \operatorname{Im} r^2 = r^2 A_{m-2}$. $\rfloor$

Следствие 1. $A_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \ldots$
(всего $\left[\frac{m}{2} + 1\right]$ слагаемых).

Пусть $C^\infty(S)$ — пр-во бесконечно гладких ф-ций на сфере $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\rho : A \to C^\infty(S)$ — отображение ограничения.

Лемма 3. $\operatorname{Ker} \rho \cap A_m = \{0\}$.

Доказательство. Если однородный многочлен равен 0 на сфере, то он — нулевой).

$V_m = \rho(H_m)$ называется пространством сферических функций веса m.

Следствие 2. $\rho(A_m) = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \ldots$

(вытекает из следствия 1 с учетом того, что на сфере $r^2 = 1$).

Размерность пр-ва V_m.

$SO(3)$ действует в A однородно заменами переменных и следовательно сохраняет A_m. Поэтому $SO(3)$ действует в V и сохраняет V_m. Пусть $G_0 \subset SO(3)$ — стационарная подгруппа точки $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

Лемма 4. Вращения из G_0 имеют в A_m базис общих собственных функций. Собственные значения имеют вид $e^{ik\varphi}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, где φ — угол, определяющий вращение из G_0. Кратность собств. значения $e^{ik\varphi}$ равна $\left[\frac{m-|k|}{2} + 1\right]$.

Доказательство. Пусть $u = x_1 - ix_2$, $\bar{u} = x_1 + ix_2$, $z = e^{i\varphi}$,

$$h(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\in G_0.$$ Тогда $h(\varphi)u=e^{i\varphi}u$, $h(\varphi)\bar u=e^{-i\varphi}\bar u$.

В A_m перейдем к базису $u^p\bar u^q x_3^l$ ($p+q+l=m$, $p,q,l\in\mathbb{Z}_+$).
Относительно $h(\varphi)$ этот моном имеет собств. значение $e^{i(p-q)\varphi}$. Имеем: $|p-q|\le p+q=m-l$.
Пусть $p-q=k$. ~~При фиксированном $p-q$ число $p+q$, а следовательно и l, могут меняться только на~~
$p+q$ имеет ту же четность, что и $p-q$. Следовательно при фиксированном $p-q=k$ и четность l фиксирована. При этом $l\le m-|k|$. Следовательно, l может принимать значения $m-|k|, m-|k|-2, \dots$, всего $\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right]$ значений. Пусть $mult_k A_m$ обозначает кратность собств. значения $e^{ik\varphi}$ в пространстве A_m. Мы доказали, что

$$mult_k A_m=\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right].$$

<u>Задача 1.</u> Вращение $h(\varphi)$ имеет в H_m базис собственных функций. Собств. зн-я имеют вид $e^{ik\varphi}$.

По лемме 2 $A_m=H_m\oplus r^2A_{m-2}$. r^2 — собственный полином с собств. значением 1. Следовательно, принимая во внимание задачу 1, имеем:

$$mult_k H_m = mult_k A_m - mult_k A_{m-1} =$$
$$=\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right]-\left[\frac{(m-2)-|k|}{2}+1\right]=1.$$

Так как $k=0,\pm1,\dots,\pm m$ — всего $2m+1$ значений, то $\dim H_m=2m+1$. Следовательно $\boxed{\dim V_m=2m+1.}$

Обозначим единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор пространства V_m с собств. значением $e^{2ik\varphi}$ относительно $h(\varphi)$ через $Y_{m,k}$.

Функции $Y_{m,k}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $|k| \leq m$) называются сферическими функциями Лапласа. Назовем k весом соотв. функции.

Зональная сферическая функция $Y_{m,0}$.

$Y_{m,0}$ имеет вес 0, и потому является линейной комбинацией ~~полиномов~~ мономов вида $u^p \bar{u}^p x_3^l = (x_1^2+x_2^2)^p x_3^l$, точнее, их ограничений на сферу. Пусть $\xi_i = \rho(x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) — ограничение функции x_i на единичную сферу. Так как $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 0$, то $\rho((x_1^2+x_2^2)^p x_3^l) = (1-\xi_3^2)^p \xi_3^l$, ~~и~~ поэтому $Y_{m,0}$ — ~~по~~ полином от ξ_3. Этот полином называется полиномом Лежандра и обозначается $P_m(\xi_3)$:

$$\boxed{Y_{m,0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P_m(\xi_3)}$$

Полиномы Лежандра ~~можно найти явно, например с помощью~~ образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ (область изменения ~~ξ~~ ξ_3 на сфере):

$$\int_{-1}^{1} P_m(\xi) P_n(\xi)\, d\xi = 0, \quad m \neq n.$$

Их можно явно найти, например с помощью процесса ортогонализации. Первые полиномы: $P_0 = 1$, $P_1 = \xi_3$, $P_2 = 3\xi_3^2 - 1$.

Функции $Y_{m,k}$, $k\neq 0$ называются присоединенными.

Вычислим $Y_{m,k}$, $k\neq 0$.

Рассмотрим в $SO(3)$ подгруппы $G_1=\{g_\theta\}$, $G_2=\{g_\varphi\}$, где

$$g_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad g_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Они действуют заменами переменных в пр-ве A_m, например $(g_\theta f)(x_1,x_2,x_3)=f(x_1, x_2\cos\theta-x_3\sin\theta, x_2\sin\theta+x_3\cos\theta)$, где $f\in A_m$.

Задача 2. Действие $SO(3)$ в A_m перестановочно с действием Δ и ρ.

Следствие. H_m и V_m инвариантны относительно G_1, G_2.

Пусть $E_\theta f=\frac{d}{d\theta}(g_\theta f)\Big|_{\theta=0}$, $E_\varphi f=\frac{d}{d\varphi}(g_\varphi f)\Big|_{\varphi=0}$.

Следствие. H_m и V_m инвариантны относительно E_θ, E_φ.

Задача 3. $E_\theta=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$, $E_\varphi=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Пусть $E_\pm=E_\varphi\mp iE_\theta=(x_1\mp ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mp i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$.

Согласно второму следствию из задачи 2 операторы $E_\pm$ действуют в пространстве V_m.

Подействуем оператором E_+ на $Y_{m,0}\in V_m$. Заметим, что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)P_m(x_3)=0$, поэтому $E_+Y_{m,0}=(x_1-ix_2)P_m'(x_3)$.

Вес этого монома равен 1 (т.к. (x_1-ix_2) входит в первой степени), и это элемент пространства V_m. Ввиду однократности спектра (веса) $E_+Y_{m,0}=Y_{m,1}$, т.е.

$$Y_{m,1}=(x_1-ix_2)P_m'(x_3).$$

Вычислим $E_+ Y_{m,1}$. Заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(x_1 - i x_2) = 0,$$ ~~а~~ поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) Y_{m,1} = (x_1 - i x_2)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) P_m'(x_3) = 0.$$

Следовательно $Y_{m,2} = (x_1 - i x_2)^2 P''(x_3)$, и вообще

$$\boxed{Y_{m,k} = (x_1 - i x_2)^k P^{(k)}(x_3) \quad (k \geq 0)}$$

Аналогично, применяя E_-, получаем

$$\boxed{Y_{m,-k} = (x_1 + i x_2)^k P^{(k)}(x_3) \quad (k \geq 0)}$$