Лекция 5. Замена переменных в интеграле.

1 Теорема об обратном отображении

Пусть $X, U \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Биекция $f\colon X \to U$ называется диффеоморфизмом класса C^p, если $f \in C^p(X)$, $f^{-1} \in C^p(U)$.

Теорема 1 (об обратном отображении)**.** *Пусть $f \in C^p$ в окрестности точки x_0, и $f'_x(x_0)$ — обратимый оператор. Тогда $\exists\, X \ni x_0$ и $U \ni f(x_0)$ такие, что $f\colon X \to U$ — диффеоморфизм. Обратно: производная диффеоморфизма невырождена в любой внутренней точке области определения.*

Доказательство. Точка x и ее образ $u = f(x)$ связаны системой уравнений $u - f(x) = 0$, причем $\det f'_x(x_0) \neq 0$. По теореме о неявном отображении $\exists\, U \ni f(x_0)$ и отображение $x = \varphi(u)$ такие, что $u - f(\varphi(u)) = 0$ $\forall u \in U$. При этом $\varphi \in C^p(U)$. Таким образом, $f \circ \varphi = id$, то есть отображение f обратимо в C^p. Обратно: пусть $f \circ \varphi = id$. Тогда по цепному правилу $f'_x(\varphi(u))\varphi'_u = 1$, то есть как f'_x, так и φ'_u — обратимые операторы. □

2 Простейшие диффеоморфизмы

Определение. Диффеоморфизм f называется простейшим, если он меняет всего одну координату, то есть $\exists\, i : 1 \le i \le n$ такое, что $f_j(x) = x_j$, $j \neq i$.

Лемма 1 (о приведении к простейшему виду)**.** *Пусть X, U — области в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ — произвольная точка и $f\colon X \hookrightarrow U$ — диффеоморфизм класса C^p такой, что $f(x_i) = x_i$ при $i > k$ Тогда в некоторой окрестности точки x_0 имеет место представление $f = g_1 \circ \ldots \circ g_k$, где g_i — простейший диффеоморфизм.*

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ f является простейшим диффеоморфизмом. Пусть утверждение верно при $k < m$. Проверим его при $k = m$. Тогда $f_i(x) = x_i$ при $i = m+1, \dots, n$, то есть блочная структура якобиана такова:

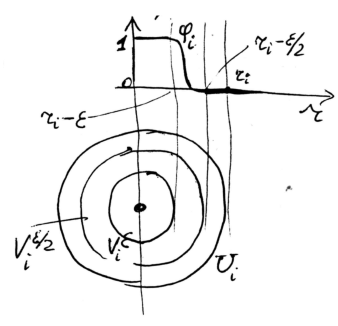
таким образом, $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m} \neq 0$ (в левом верхнем углу). Поэтому найдется его минор размера $m-1$, не равный 0. Без ограничения общности это минор $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m-1}$.
Рассмотрим отображение $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$, где $\tilde{f}_i = f_i$ при $i \neq m$, и $\tilde{f}_m = x_m$. Тогда

$$\tilde{f}'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1,\dots,f_{m-1})}{\partial(x_1,\dots,x_{m-1})} & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & id \end{pmatrix},$$

где id — единичная матрица размера $(n-m)\times(n-m)$. Таким образом $\det \tilde{f}'_x \neq 0$. По теореме об обратном отображении $\exists\, \tilde{f}^{-1}$ (в некоторой окрестности точки $\tilde{f}(x_0)$). Положим $g_m = \tilde{f}^{-1} \circ f$, то есть $f = \tilde{f} \circ g_m$. К $\tilde{f}$ применим предположение индукции: $\tilde{f} = g_1 \circ \dots g_{m-1}$. Тогда $f = g_1 \circ g_2 \circ \dots g_m$, что и требуется. □

Теорема 2 (о разбиении единицы)**.** *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $M \subset \cup_{i=1}^k U_i$, где U_i — открытые шары. Тогда существуют функции $\psi_1, \dots, \psi_k$ на $\mathbb{R}^n$ такие, что $\psi_i \geq 0\, \forall i$, $\psi_i \equiv 0$ вне U_i и $\sum_{i=1}^k \psi_i(x) = 1$ на M.*

Доказательство. 1). Покрытие U_i можно сузить, то есть взять такие открытые шары $V_i \subset U_i$, что M все еще лежит в $\cup_{i=1}^k V_i$. Если предположить, что это не так, то для любого $\varepsilon \geq 0$ существует точка $m_\varepsilon \in M$, $m_\varepsilon \notin \cup_{i=1}^k V_i^\varepsilon$, где V_i^ε — шар, концентрический с U_i и радиуса на ε меньше. Пусть $\varepsilon_n \to 0$, $\{m_n\}$ — последовательность соответствующих точек, и m — ее предельная точка. Тогда можно утверждать, что $m \notin u_i$ ни при одном i (иначе бы она принадлежала V_i^ε при достаточно малом ε). Но, с другой стороны, $m \in M$, что является противоречием.



2). Построим функцию $\varphi_i(x)$, зависящую на самом деле только от радиуса, как показано на рисунке (предварительно выбрав ε так, что $\{V_i^\varepsilon\}$ — покрытие M и сужение $\{U_i\}$), в частности $\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in V_i \\ 0, & x \notin U_i. \end{cases}$

Для любого $x \in M$ $\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) > 0$. Действительно, всегда $\exists\, i_0 : x \in V_{i_0}$. Следовательно $\varphi_{i_0}(x) = 1$. Теперь положим $\psi_i(x) = \varphi(x)/\left(\sum_{j=1}^k \varphi_j(x)\right)$ $(x \in M)$. По построению $\Psi(x) \geq 0$, $\forall x$; $\psi_i(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_i$, и $\sum_{i=1}^k \psi(x) = 1$ при $x \in M$. Поскольку очевидно, что φ_i можно выбрать в классе C^∞, то и $\varphi \in C^\infty$. $\square$

Теорема 3 (о замене переменных в интеграле Римана)**.** *Пусть $X, U \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные множества, f — интегрируемая функция на X, непрерывная на $\overline{X}$, $\varphi\colon U \to X$ — диффеоморфизм, который может быть продолжен на некоторые открытые множества, содержащие X и U. Тогда*

$$\int_X f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(u)) \big|\det \varphi'_u\big|\,du \tag{1}$$

(и оба интеграла существуют).

Доказательство. 1). Теорема верна, если φ — простейший диффеоморфизм. Действительно, будем считать, что $x_i = \varphi(U) = u_i$ при $i > 1$. Согласно теореме Фубини,

$$\int_X f(x)\,dx = \int_{\mathrm{Pr}_{x_2,\ldots,x_n}(X)} dx_2 \ldots dx_n \int_S f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1, \tag{2}$$

где S — сечение множества X при постоянных $x_2, \ldots x_n$. По формуле замены переменных в интеграле Римана в одномерном случае,

$$\int_S f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 = \int_{\varphi^{-1}(S)} f(\varphi_1(u)), x_2, \ldots, x_n) \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right|\,du_1 \tag{3}$$

(заметим, что модуль производной возникает здесь потому, что согласно нашему определению в интеграле Римана отсутствует понятие прохождения отрезка в отрицательном направлении). Из (2) и (3) следует, что

$$\int_X f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(u)) \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\right|\, du_1 \ldots du_n$$

(при этом мы повторно применили теорему Фубини, уже по u). Однако, заметим, что из условия $x_i = u_i$ $(i \geq 2)$ следует, что $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$, то есть для простейшего диффеоморфизма теорема доказана.

2). Если теорема верна для диффеоморфизмов $\varphi_1\colon U \to X$ и $\varphi_2\colon V \to U$, то она верна и для их произведения $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Это следует из цепного правила: $\varphi'_v = (\varphi_1)'_u \circ (\varphi_2)'_v$. Следовательно, $\det \varphi'_v = \det(\varphi_1)'_u \cdot \det(\varphi_2)'_v$. Таким образом,

$$\int_X f(x)\,dx = \int_U f\left(\varphi_1(u)\right)\left|\det(\varphi_1)'_u\right|du =$$
$$= \int_V f\left(\varphi_1(\varphi_2(v))\right)\left|\det(\varphi_1)'_u\big|_{u=\varphi_2(v)}\right|\det(\varphi_2)'_v\big|\,dv =$$
$$= \int_V f\left(f(\varphi\,(V))\right)\left|\det\varphi'(v)\right|dv. \quad (4)$$

3). С помощью разбиения единицы сведем общий случай теоремы к рассмотренным утверждениям 1 и 2.

По условию теоремы диффеоморфизм φ может быть продолжен на некоторое открытое множество, содержащее U. Это значит, что лемма о приведении к простейшему виду справедлива для всех точек $\overline{X}$ (включая граничные). Так как $\overline{X}$ компакт, существует покрытие множества $\overline{X}$ открытыми шарами $X_1,\ldots,X_k$, на каждом из которых φ есть произведение простейших, а следовательно, утверждение теоремы верно. Пусть $\sum_{i=1}^k \psi_i(x) = 1$ — разбиение единицы, соответствующее покрытию X_i. Тогда,

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X f(x)\sum_{i=1}^k \psi_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \int_{X_i\cap X} f(x)\psi_i(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^k \int\limits_{\varphi^{-1}(X_i\cap X)} f(\varphi(u))\psi_i(\varphi(u))\left|\det\varphi'_u\right|du. \quad (5)$$

В последнем выражении мы можем заменить область интегрирования на U, так как $\psi_i(\varphi(u)) = 0$ вне $\varphi^{-1}(X_i\cap X))$:

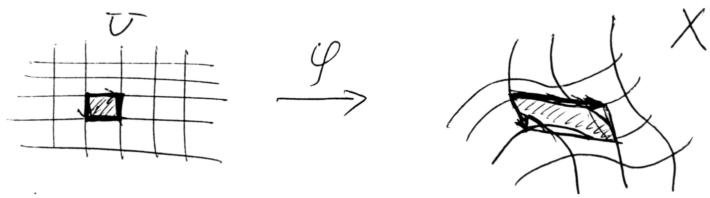
$$\int_X f(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \int_U f(\varphi(u))\psi_i(\varphi(u))\left|\det\varphi'_u\right|du =$$
$$= \int_U \Big(\sum_{i=1}^k \psi_i(\varphi(u))\Big)\left|\det\varphi'_u\right|du = \int_U f(\varphi(u))\left|\det\varphi'_u\right|du \quad (6)$$

Теорема доказана. □

Два важных замечания.

1). Теорема о замене переменных показывает, что независимым от выбора координат (параметризации области X) является отнюдь не интеграл функции, а интеграл такого объекта: $f(\varphi(u))\big|\det\varphi'_u\big|$, где φ — любой диффеоморфизм, удовлетворяющий условию невырожденности на границе области. Интеграл именно этого объекта является инвариантом пары (область, функция) относительно выбора координат. Это замечание получит в дальнейшем развитие при интегрировании дифференциальных форм, и вывод будет таков: *интегрировать надо по форме объема.*

2). При замене переменных φ прямоугольная система координат в U переходит в какую-то, вообще говоря, криволинейную систему координат в X.



Отображение φ'_u линейно и переводит элементарный куб решетки в параллелепипед, образованный касательными векторами к координатным линиям в X. Отношение объема этого параллелепипеда (называемое *элементом объема*) к объему куба (с учетом ориентации) равно $\big|\det\varphi'_u\big|$. Теорема о замене переменных говорит, что можно интегрировать в любой системе координат, но по элементарному объему.