Лекция 7. Несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Напомним, что E называется измеримым, если E ограничено и характеристическая функция E интегрируема (на любом объемлющем бруске). Соотв. интеграл называется объемом E ($vol(E)$).

Пусть E не обязательно ограничено. Исчерпанием множества E называется последовательность измеримых множеств $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots \subseteq E$, такая, что $\bigcup E_i = E$.

Задача 1. Если $\{E_i\}$ - исчерпание измеримого множества E, то $\lim\limits_{i\to\infty} vol(E_i) = vol(E)$.

Задача 2. Если $\{E_i\}$ - исчерпание измеримого множества E и функция f интегрируема на E, то функции $f|_{E_i}$ интегрируемы при каждом i и
$\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f(x)dx$.

~~Лем~~ Определение. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, возможно, неограниченная функция. Говорят, что f интегрируема на E, если

1) существует исчерпание множества E ограниченными измеримыми мн-вами E_i, такое, что функции $f|_{E_i}$ ограничены и интегрируемы при всех i, а предел $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f dx$ существует.

2) этот предел одинаков для всех исчерпаний,

обладающих указанными свойствами. В этом случае число $\int_E f\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f(x)\,dx$ называется несобственным интегралом f на E.

Замечание. Возможны и другие подходы к определению интеграла, связанные с выбором конкретных исчерпаний. Например, $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = \lim_{\tau\to+\infty} \int_{-\tau}^{\tau} f\,dx$ называется интегралом в смысле главного значения (если предел существует).

Задача 3. Постройте пример не интегрируемой функции на $\mathbb{R}$, для которой, тем не менее, существует интеграл в смысле главного значения.

Лемма 1. Пусть $f: E\to\mathbb{R}$ – неотрицательная функция и $\{E_i^{(k)}\}_{k=1,2}$ – два исчерпания множества E измеримыми подмножествами, такие что $f|_{E_i^{(k)}}$ интегрируема при всех i, k, и оба предела $A_k = \lim_{i\to\infty} \int_{E_i^{(k)}} f\,dx$ существуют. Тогда $A_1 = A_2$.

Доказательство. Пусть $F_{ij} = E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}$.
Тогда $\{F_{ij} \mid j=1,2,\dots\}$ – исчерпание $E_i^{(1)}$. Согласно задаче 2 $\int_{E_i^{(1)}} f\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{F_{ij}} f\,dx$. Но $F_{ij} \subseteq E_j^{(2)}$, поэтому $\lim_{j\to\infty} \int_{F_{ij}} f\,dx \le \lim_{j\to\infty} \int_{E_j^{(2)}} f\,dx \le A_2$.
Следовательно $A_1 \le A_2$. Противоположное неравенство

доказывается аналогично.

Теорема 1. Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}^n$ ограничены и интегрируемы на одних и тех же измеримых подмножествах множества E. Пусть $|f(x)| \le g(x)$, $x \in E$, и функция g интегрируема на E. Тогда и $f(x)$ интегрируема на E.

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — измеримое исчерпание множества E, такое, что $f|_{E_i}$ и $g|_{E_i}$ интегрируемы при любом i. Тогда по критерию Лебега $|f|$ — тоже интегрируемая функция на E_i. Имеем:

$$0 \le \int\limits_{E_{n+k}} |f|\,dx - \int\limits_{E_n} |f|\,dx = \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} |f|\,dx \le \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} g\,dx =$$

$$= \int\limits_{E_{n+k}} g\,dx - \int\limits_{E_n} g\,dx.$$

Так как последовательность $\int\limits_{E_n} g\,dx$ сходится, она удовлетворяет критерию Коши. Значит и последовательность $\int\limits_{E_n} |f|\,dx$ удовлетворяет критерию Коши, и потому сходится. Согласно лемме 1 функция $|f|$ интегрируема на E. Положим $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$. $f_\pm$ — неотрицательные функции и $|f_\pm| \le |f|$. Следовательно $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f_\pm\,dx$ существует для любого исчерпания и по лемме 1 не зависит от него. Так как $f = f_+ - f_-$,

~~то их интегрируемо~~

что из интегрируемости $f_\pm$ вытекает интегрируемость f.)

Задача 3. Доказать для несобственных интегралов свойства линейности и аддитивности по отношению к области интегрирования.

Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 2. $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $\{f_t\}$ — семейство ограниченных интегрируемых функций на E, равномерно на E сходящееся к $f(x)$ при $t \to t_0$. Тогда f интегрируема на E и

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{t \to t_0} \int_E f_t(x)\,dx.$$

Доказательство. Заключим E в брусок I и продолжим f_t и f нулем вне E. Тогда $f_t \xrightarrow[t \to t_0]{} f$ равномерно на I. Для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |t - t_0| < \delta \Longrightarrow$

$$\Rightarrow |f_t(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3\, vol(I)}, \quad \forall x \in I.$$ Возьмем такое t.

Пусть $I = \cup I_i$ — разбиение, для которого $S_{\{I_i\}}(f_t) - s_{\{I_i\}}(f_t) < \frac{\varepsilon}{3}$. Таковое существует, так как f_t интегрируема. Тогда

$$S_{\{I_i\}}(f) - s_{\{I_i\}}(f) = \left(S_{\{I_i\}}(f) - S_{\{I_i\}}(f_t)\right) +$$

$$+ \left(S_{\{I_i\}}(f_t) - s_{\{I_i\}}(f_t)\right) + \left(s_{\{I_i\}}(f_t) - s_{\{I_i\}}(f)\right).$$

Оценивая первую скобку, заметим, что для $\forall x \in E$

$f(x) < f_t(x)+\eta$, где $\eta = \varepsilon/3\,vol(I)$. Значит, для $\forall i$

$\sup\limits_{I_i} f \le \sup\limits_{I_i} f_t + \eta$, следовательно

$$S_{\{I_i\}}(f) - S_{\{I_i\}}(f_t) \le \sum_i \eta\, vol(I_i) = \varepsilon/3 .$$

Аналогично $\inf\limits_{I_i} f_t - \inf\limits_{I_i} f \le \eta$, и следовательно

$s_{\{I_i\}}(f_t) - s_{\{I_i\}}(f) \le \varepsilon/3$. Таким образом

$S_{\{I_i\}}(f) - s_{\{I_i\}}(f) < \varepsilon$ и f интегрируема на E.

Тогда при $|t-t_0|<\delta$ имеем $\left|\int_E f\,dx - \int_E f_t\,dx\right| \le \int_E |f-f_t|\,dx \le$
$\le \frac{\varepsilon}{vol(I)} \cdot vol(E) < \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $I\subset\mathbb{R}$ — интервал, $f(x,y)$ $(x\in E, y\in I)$ — функция на $E\times I$, такая, что

1). $f(x,y)$ интегрируема по x на E при $\forall y\in I$;

2). $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна по y, равномерно относительно ~~на I~~ $x\in E$, и интегрируема по x на E при $\forall y \in I$. ~~а также ограничена на $E\times I$~~.

Тогда функция $F(y)=\int_E f(x,y)\,dx$ принадлежит классу $C^1(I)$ и $F'(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Доказательство. Пусть $[y,y+h]\subset I$. Тогда

$$\left| F(y+h)-F(y) - \left(\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\right)h\right| \le$$

$$\le \int_E \left| f(x,y+h)-f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h \right| dx .$$

По теореме Лагранжа $f(x, y+h) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_x h)h$, где $0 < \theta_x < 1$, и поэтому последняя величина в цепочке неравенств есть

$$\left(\int_E \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_x h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| dx \right) \cdot |h| \qquad (*)$$

Подынтегральное выражение стремится к 0 при $h \to 0$, причем равномерно по x (по условию 2)). ~~[illegible]~~ По теореме 2 и интеграл от нее стремится к 0. Следовательно $(*)$ есть $o(h)$, и теорема доказана. |

Теоремы 2 и 3 остаются верными, ~~если добавить условие~~ для несобственных интегралов, ~~при~~ зависящих от параметра при дополнительных условиях, зависящих от типа несобственного интеграла. Для функций, интегрируемых в ~~несобственном~~ смысле самого первого определение данной лекции, таким условием является условие равномерной по параметру сходимости интеграла ~~по параметру~~:

~~Определение~~ Пусть $f: E \times I \to \mathbb{R}$, где $E \subseteq \mathbb{R}^n$, I - интервал, и $f(x,y)$ интегрируема на E при $\forall y \in I$. Пусть для любого исчерпания $\{E_i\}$ множества E ~~функция~~ предел $\lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f(x,y)\,dx$ является равномерным по $y \in I$.

Задача. Доказать теоремы 2, 3 для несобственных, равномерно сходящихся по параметру интегралов. В теореме 3 потребовать равномерной сходимости интеграла $\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$.