Лекция 8. Интегрирование дифференциальных форм.

(Внешней, дифференциальной) k-формой на $\mathbb{R}^n$ называется формальное выражение

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

удовлетворяющее соотношениям $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ для $\forall i, j = 1, \ldots, n$, где $\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)$ — функции на $\mathbb{R}^n$ (области в $\mathbb{R}^n$) класса C^1. Обозн.: $k = \deg \omega$.

Пример. 1-форма: $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx^i$.

Внешнее произведение. Пусть $\xi = \sum_{i_1 \ldots i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $\eta = \sum_{j_1 \ldots j_l} \eta_{j_1 \ldots j_l} \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$. По определению

$$\xi \wedge \eta = \sum_{i_1, \ldots, i_k, j_1 \ldots j_l} \xi_{i_1 \ldots i_k} \eta_{j_1 \ldots j_l} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$$

Ассоциативность: $(\omega \wedge \xi) \wedge \eta = \omega \wedge (\xi \wedge \eta)$.

Суперкоммутативность: $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \cdot \deg \eta} \, \eta \wedge \omega$.

Внешний дифференциал. По определению

$$d\left(\sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i, i_1, \ldots i_k = 1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} \, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

или, по-другому,

$$d\left(\sum_{i_1 \ldots i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1 \ldots i_k} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Правило Лейбница: $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\eta$.

<u>k-поверхностью</u> будем называть неособую поверхность коразмерности $(n-k)$ (лекция 3), т.е. поверхность, заданную системой $(n-k)$ уравнений класса C^1, в каждой точке которой выполнены условия теоремы о неявном отображении. Таким образом, в окрестности каждой точки неособой k-поверхности можно выбрать k координат, через которые выражаются все остальные. Удобно ввести для этих независимых координат отдельное обозначение $u^1,\dots,u^k$, и писать $x^i=f^i(u^1,\dots,u^k)$, $i=1,\dots,n$. $u^1,\dots,u^k$ называются <u>локальными координатами</u>. Их выбор не однозначен. Назовем окрестность точки неособой поверхности вместе с заданными в ней локальными координатами <u>локальной картой</u>, а систему локальных карт — <u>атласом</u>. Мы будем рассматривать поверхности с <u>конечным атласом</u>.

<u>Ограничение</u> k-формы $\omega=\sum\limits_{i_1\dots i_k=1}^{n}\omega_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$ на локальную карту l-поверхности равно

$$\tilde\omega=\sum_{j_1\dots j_k=1}^{l}\tilde\omega_{j_1\dots j_k}\,du^{j_1}\wedge\dots\wedge du^{j_k},\text{ где }\tilde\omega_{j_1\dots j_l}=\sum_{i_1\dots i_k=1}^{n}\omega_{i_1\dots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{j_k}},$$

что может быть легко получено подстановкой df^{i_s} вместо dx^{i_s} в ω. В частности, <u>при $k=l$</u>

$$du^{j_1}\wedge\ldots\wedge du^{j_k} = (-1)^{\deg(j_1\ldots j_k)} du^1\wedge\ldots\wedge du^k$$

(где в показателе стоит четность перестановки) и

$$\tilde{\omega} = \Big(\sum_{i_1\ldots i_k=1}^{n} \omega_{i_1\ldots i_k} \det\frac{\partial(x^{i_1}\ldots x^{i_k})}{\partial(u^1\ldots u^k)}\Big) du^1\wedge\ldots\wedge du^k. \quad (1)$$

Записывая более кратко $\tilde{\omega} = \omega^{(u)} du^1\wedge\ldots\wedge du^k$, где $\omega^{(u)}$ – функция на локальной карте, мы имеем при замене координат $u=u(v)$:

$$\omega^{(v)} = \omega^{(u)} \det\frac{\partial(u^1,\ldots,u^k)}{\partial(v^1,\ldots,v^k)}. \quad (2)$$

<u>Замечание</u>. При $k\neq l$ функции $\tilde{\omega}_{j_1\ldots j_k}$ подчиняются более сложному закону преобразования, который, однако, легко получается из их определения. Набор локальных функций, ~~~~ зависимых от выбора локальных координат, и подчиняющихся этому закону, ~~~~ при их замене, называется <u>тензором ковалентности к</u>. Таким образом ~~внешние~~ к-формы можно целиком определить во внутренних терминах (т.е. не используя вложение поверхности в $\mathbb{R}^n$) как кососимметрические тензоры ковалентности к. Таким путем теория внешних форм строится в рамках концепции гладкого многообразия.

Пусть E - компактное множество, лежащее в локальной карте с координатами u (неособой к-поверхности), ω - к-форма.

<u>Определение</u>. $\int\limits_E \omega = \int\limits_E \omega^{(u)}\, du^1 \ldots du^k$

(справа берется интеграл Римана).

Ввиду соотношения (2) и формулы замены переменных $\int\limits_E \omega$ <u>не зависит от выбора локальных координат</u> (и локальной карты, содержащей E).

Пусть дана <u>компактная k-поверхность</u> S, $\{U_\alpha\}$ – конечный атлас на ней, $\{\varphi_\alpha\}$ – разбиение единицы, согласованное с этим атласом, т.е. $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ ($\operatorname{supp} \varphi_\alpha$ – носитель φ_α).

<u>Определение</u>. $\int\limits_S \omega = \sum\limits_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega$.

Форма $\varphi_\alpha \omega$ имеет компактный носитель, лежащий в U_α, поэтому правая часть уже определена.

<u>Независимость от атласа и разбиения единицы.</u>

Пусть $\{V_\beta\}$ – еще один атлас, и $\{\psi_\beta\}$ – согласованное с ним разбиение единицы. Тогда $\{\varphi_\alpha \psi_\beta\}$ – разбиение единицы, согласованное с покрытием $\{U_\alpha \cap V_\beta\}$.

$$\sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega = \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \sum_\beta \varphi_\alpha \psi_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int\limits_{U_\alpha \cap V_\beta} \varphi_\alpha \psi_\beta \omega =$$

$$= \sum_\beta \int\limits_{V_\beta} \psi_\beta \omega.$$

Основные примеры

Циркуляция векторного поля вдоль кривой: $\int\limits_{\gamma} \bar{F} d\bar{x}$, где $\bar{F}=(P,Q,R)$ — вектор-функция на $\mathbb{R}^3$, $d\bar{x}=(dx,dy,dz)$, $\bar{F}d\bar{x}=Pdx+Qdy+Rdz$ — скалярное произведение. Если $\bar{F}$ — сила, то циркуляция — это работа вдоль пути γ.

Поток векторного поля через поверхность (в $\mathbb{R}^3$): определяется как $\int\limits_{S} \mathcal{D}_x\, dy\wedge dz+\mathcal{D}_y\, dz\wedge dx+\mathcal{D}_z\, dx\wedge dy$, где $\mathcal{D}=(\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z)$ — заданное векторное поле.

„Единичная нормаль на элемент площади" — по определению $\bar{e}_n dS=(dy\wedge dz, dz\wedge dx, dx\wedge dy)$ (3)
(т.е. набор трех 2-форм).

Задача. Пусть $\bar{x}=\bar{x}(u,v)$ — параметрическое задание поверхности (u,v — лок. координаты). Определим элемент площади поверхности как $dS=\left|\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\right|$ (площадь элементарного касательного параллелограмма), а $\bar{e}_n$ — как единичную нормаль, такую, что $\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial u},\frac{\partial\bar{x}}{\partial v},\bar{e}_n\right)$ — правая тройка векторов. Тогда ф-лу (3) можно доказать.

Задача. Поток $=\int\limits_{S}\mathcal{D}_n\, dS$, где $\mathcal{D}_n=(\mathcal{D},\bar{e}_n)$ — проекция поля на единичную нормаль.

Ротор векторного поля $F=(P,Q,R)$ — это дифференциал формы $Pdx\wedge dy+Qdy\wedge dz+Rdz\wedge dx$. Обычно 3-форму $dx\wedge dy\wedge dz$ в ответе отбрасывают и пишут просто:
$\operatorname{rot}\bar{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.
Мнемоническая формула: $\operatorname{rot}\bar{F}=(P,Q,R)\times\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$.