Лекция 9. Формула Стокса и её классические случаи

Пусть S — замкнутое подмножество ориентированной $(k+1)$-поверхности, ∂S — его граница. Предположим, что для $\forall s \in \partial S$ $\exists$ окрестность U_s, такая, что $S \cap U_s = \{(x^0, x^1, \dots, x^k) \in U_s \mid x^0 \leq 0\}$. Тем самым локально ∂S имеет уравнение $x^0 = 0$, т.е. является неособой k-поверхностью.

Пример. P — неособая $(k+1)$-поверхность, $F(x) = 0$ — гиперповерхность, $S = \{x \in P \mid F(x) \leq 0\}$.

Пусть ω — k-форма, $d\omega$ — её дифференциал. ~~Мы хотим установить связь между $\int_{\partial S} \omega$ и $\int_S d\omega$.~~

Формула Стокса.
$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

Доказательство. Поскольку интегралы определяются с помощью разбиения единицы (лекция 8), достаточно ограничиться случаем, когда $\operatorname{supp} \omega \subset U$, $U \subset S$ — окрестность. Пусть в U
$$\omega = f\, dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k.$$

1). U не пересекается с границей. Тогда $\partial S = 0$ и $\int_{\partial S} \omega = 0$. Но и $\int_S d\omega = 0$, так как

$$d\omega = (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^k$$ и мы получаем

интеграл полной производной от финитной функции:

$$\int_S d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right)}_{=0} dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k = 0.$$

2). $U \cap \partial S \neq \emptyset$.

Если $i \neq 0$, то $\omega|_{\partial S} = 0$ (ω содержит dx^0, а на ∂S $x^0 = 0$). Т.о. $\int_{\partial S} \omega = 0$. Правая часть формулы Стокса равна 0 по тем же причинам, что и раньше.

Пусть теперь $i = 0$. Тогда

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\mathbb{R}^k} f(0, x^1, \ldots, x^k)\, dx^1 \ldots dx^k.$$ Далее

$$\int_S d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \frac{\partial f}{\partial x^0} dx^0 dx^1 \ldots dx^k = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial x^0} dx^0 \right) dx^1 \ldots dx^k =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k} \left(f(0, x^1, \ldots, x^k) - f(-\infty, x^1, \ldots, x^k) \right) dx^1 \ldots dx^k.$$

Но $f(-\infty, x^1, \ldots, x^k) = 0$ в силу финитности f. Теорема доказана.

Замечание. В последней выкладке доказательства негласно предполагается, что порядок координат $(x^0, x^1, \ldots, x^k)$ согласован с ориентацией на S, а порядок $(x^1, \dots, x^k)$ — с ориентацией на ∂S. Изменить знак x^0, не меняя ориентацию ∂S таким образом нельзя, если мы хотим, чтобы формула Стокса оставалась справедливой. Ввиду условия $x^0 \leq 0$ на S, мы получаем, что положительные направления координаты x_0 совпадает с ~~внешней~~ направлением внешней нормали к ∂S (лежащей в касательном пространстве к S).

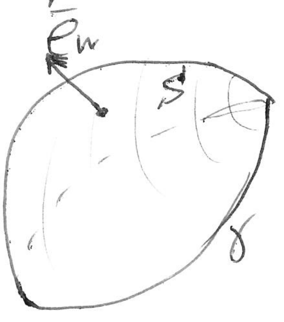
Циркуляция векторного поля вдоль кривой.

$\bar F = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$; $d\bar x = (dx, dy, dz)$.

$\bar F d\bar x \overset{def}{=} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ — 1-форма.

Пусть γ — кривая. $\int_\gamma \bar F d\bar x$ называется циркуляцией $\bar F$ вдоль γ. Если F — сила, то циркуляция — работа вдоль контура.

2-мерная формула Стокса. S — поверхность в $\mathbb{R}^3$, γ — ограничивающий её контур, $\bar e_n$ — единичная нормаль. Тогда



$$\int_\gamma \bar F d\bar x = \int_S (\mathrm{rot}\, \bar F)_n \, dS,$$

где $(\mathrm{rot}\, \bar F)_n = (\mathrm{rot}\, \bar F, \bar e_n)$.

Доказательство. См. представление для $\bar F d\bar x$ и $\bar e_n dS$ в предыдущей лекции.

Следствие 2-мерной ф-лы Стокса

Формула Грина. В случае плоской области S

$$\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

(следует из 2-мерной ф-лы Стокса).

Формула площади: $S = -\oint_{\partial S} y\,dx = \oint_{\partial S} x\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\partial S} (x\,dy - y\,dx)$.

Условие независимости интеграла от пути в $\mathbb{R}^3$:

$$\oint_\gamma F\,d\vec{x} = 0,\ \forall \gamma \iff \operatorname{rot} F = 0 \text{ (поле безвихревое)}.$$

В этом случае существует функция $U = U(x,y,z)$, такая что $F\,d\bar{x} = dU$, или $F = \operatorname{grad} U$.
U строится по формуле $U(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} F\,d\bar{x}$.

Пример. Если F – поле сил и $\exists\, U$, т.ч. $\operatorname{grad} U = \bar{F}$, то F называется потенциальным полем, а U – потенциалом. Т.о. поле потенциально $\iff$ работа по замкнутому контуру $= 0$, а также $\iff$ поле является безвихревым.
В потенциальном поле работа сил между двумя точками A и B равна разности потенциалов $U(B) - U(A)$: $\int_A^B F\,d\bar{x} = \int_{P_0}^B F\,d\bar{x} - \int_{P_0}^A F\,d\bar{x} = U(B) - U(A)$.

Задача. В $\mathbb{R}^3$ $\int \omega$ не зависит от пути $\iff$ ω – ~~не~~ точная форма (полный дифференциал, ~~некоторой фу~~ дифференциал некоторой функции).

Формула Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{\partial V} F_n\, dS = \iiint\limits_V (\operatorname{div} F)\, dv, \text{ где } \operatorname{div} \bar F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Доказательство. $F_n\, dS = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$.]

"Векторная формула". Пусть f – функция, тогда

$$\iint\limits_{\partial V} f\, \bar e_n\, dS = \iiint\limits_V (\operatorname{grad} f)\, dv.$$

Первое уравнение гидродинамики

По ф-ле Гаусса-Остроградского для малого объема V
$\int\limits_{\partial V} F_n\, dS = (\operatorname{div} \bar F)\, V$, т.е. $\operatorname{div} \bar F$ – средний поток через
(средний здесь – отнесённый к единице объема)
малую поверхность, окружающую точку. Этот поток можно интерпретировать как источник (сток).
Т.о. ф-ла Гаусса-Остроградского утверждает, что поток через поверхность равен сумме расходов источников (стоков) внутри поверхности, то есть выражает закон сохранения вещества в гидродинамике.

Отсюда следует первое основное ур-е гидродинамики – уравнение непрерывности.
В гидродинамике полагают $\bar F = \rho \bar v$ (вектор плотности тока). Для произвольного объема изменение массы жидкости в объеме равно $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV$, а поток через поверхность равен $\int \rho v_n\, dS$, где $\bar v$ – скорость. Т.о. $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV = \int \rho v_n\, dS =$
$= \int (\operatorname{div} \rho \bar v)\, dV$. Т.к. это для любого объема, то

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar v = 0}$$ – уравнение непрерывности.

Второе уравнение гидродинамики (уравнение Эйлера).

Возьмем в „векторной формуле" $f = p$, где p - давление. Тогда $\oint\!\!\oint p e_n \, dS = \iiint (\mathrm{grad}\, p)\, dV$.

Если e_n - это внешняя нормаль, то $-\oint\!\!\oint p \bar{e}_n \, dS$ - это сила, действующая извне на объем жидкости. Т.о. $\mathrm{grad}\, p$ - сила, действующая на единицу бесконечно малого объема. По закону Ньютона $\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p$. По формуле полной производной $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = (\bar{v}\nabla)\bar{v}$, где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Т.о.

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p}$$ - ур-е Эйлера.