21.02.08

Листок №2. Кривизна поверхности

1. Вычислите Гауссову кривизну а) конуса б) сферы в) однополостного гиперболоида ($x^2 + y^2 - z^2 = -1$).
2. Вычислите Гауссову кривизну поверхности вращения.
3. Вычислите Гауссову кривизну плоскости Лобачевского.
4. Докажите, что в точках положительной кривизны поверхность выпукла.
5. Существует ли в $\mathbb{R}^3$ замкнутая поверхность, кривизна которой в каждой точке неположительна?
6*. Найдите явное выражение Гауссовой кривизны через метрику.
7. Пусть $\Gamma\colon M \to S^2$ — Гауссово отображение (отображение, переводящее точку M в направление нормали в этой точке). Докажите, что $KdS = \Gamma^* dS$ (dS — форма площади).
8. Пусть M — замкнутая поверхность. Докажите, что $\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dS$ — целое число.
9. Пусть $C(r)$ — длина "окружности" радиуса r на поверхности M. Докажите, что $C(r) \cong 2\pi r + cKr^3$, где c — некоторая константа (не зависящая от поверхности). Чему равна эта константа?
10. Пусть голономия при обходе по границе маленького диска Ω есть поворот на угол $\phi(\Omega)$. Докажите, что $\phi(\Omega) \cong 2\pi K \cdot S(\Omega)$ (ср. с вычислением площадей в геометрии Лобачевского).