28.02.08

Листок №3

Кривизна

1. Пусть кривая профиля $(x(t), y(t))$, параметризованная длиной дуги, вращается вокруг оси x. Тогда кривизна поверхности вращения вычисляется по формуле $K = -1/y\frac{d^2y}{ds^2}$. Докажите это и найдите профили, дающие поверхности постоянной кривизны $-1, 0, 1$.

Попробуйте убедить себя (а уже потом Гришу или меня) в том, что Вам понятен следующий десяток фактов:

2. Касательные расслоения TS^1 и TS^3 тривиальны.

3. Касательное расслоение TS^2 нетривиально.

4. Пусть $M \longrightarrow S^1$ – лист Мебиуса, f: $S^1 \longrightarrow S^1$ – отображение, задаваемое формулой $f(z) = z^2$. Доказать, что $f^*(M)$ – тривиальное расслоение.

5. Касательное расслоение ко всякой группе Ли тривиально.

6. Пусть ζ каноническое расслоение над $\mathbb{R}P^n$ (=вещественное проективное пространство), $n = 1, 2$. Тривиально ли это расслоение? Тот же вопрос касательно расслоения $T\mathbb{R}P^n$, $n = 1, 2$.

7. Если пространство $\mathbb{R}^n$ можно снабдить структурой $\mathbb{R}$-тела, то касательное расслоение TS^{n-1} тривиально.

8. Нормальное расслоение к ориентированной поверхности в E^3 тривиально.

9. Векторное расслоение обладает свойством поднятия пути и накрывающей гомотопии.

10. Пусть f: $M \longrightarrow N$ гладкое отображение гладких многообразий. Тогда

$\mathrm{Hom}(TM, f^*TM)$ – гладкое векторное расслоение над M, а Df – сечение этого расслоения.

11*. Векторное расслоение над конечномерной клеткой тривиально.

Замечание. М. Атиа в лемме 1.4.4 из книги "Лекции по K-теории" замечательно просто доказывает, что если f: $X \longrightarrow Y$ – гомотопическая эквивалентность компактных хаусдорфовых пространств, то категории векторных расслоений на X и Y эквивалентны. Для первого знакомства с теорией векторных расслоений очень рекомендую рассказ М. Атиа (глава I его книги).