06.03.08

Листок №4. Расслоения

1. Пусть $f\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений с одинаковой базой. а) Является ли его (послойное) ядро векторным расслоением? б) Докажите, что если $\dim \operatorname{Ker} f$ — постоянная функция (на базе), то $\operatorname{Ker} f$ — векторное расслоение.

Пусть $\mathbb{P}^n$ — комплексное или вещественное проективное пространство, ξ — тавтологическое ("слой над прямой — сама эта прямая") расслоение на $\mathbb{P}^n$.
2. Постройте у ξ^* сечение, трансверсально пересекающее базу по $\mathbb{P}^{n-1}$ (таким образом, $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ реализует класс Эйлера расслоения ξ^*).
3. Докажите, что $T\mathbb{P}^n \oplus 1 \cong (n+1)\xi^*$ (1 — тривиальное линейное расслоение).
4*. Сформулируйте и докажите аналог предыдущего утверждения для грассманиана $G_{n,k}$ k-мерных подпространств n-мерного пространства.

5. Пусть X вложено в $X \times X$ диагонально. Докажите, что нормальное расслоение к X (при этом вложении) изоморфно касательному.

6*. Докажите, что $\mathrm{Vect}_n(S^k) = \pi_{k-1}(GL_n)$ (и вообще $\mathrm{Vect}_n(\Sigma X) = [X, GL_n]$). Какому числу из $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ соответствует касательное расслоение к S^2?