Листок №6. Расслоения II

1. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность. Докажите, что $f^*\colon \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ — изоморфизм.
Указание. Докажите, что f^* не меняется при малых деформациях f.
2. Докажите, что любое k-мерное расслоение на n-мерном пространстве индуцируется с $\mathrm{Gr}(k, N)$ для $N \gg n$.
Указание. Вложите расслоение в тривиальное.
3. Докажите, что $\mathrm{Vect}_k(X) = [X, \mathrm{Gr}(k, \infty)]$ ($[X, Y]$ — классы гомотопии отображений из X в Y; $\mathrm{Gr}(k, \infty) = \lim_N \mathrm{Gr}(k, N)$).
4*. Вычислите $\mathrm{Vect}_N^{\mathbb{C}}(S^k)$ для $k \leq 5$.

5. Докажите, что $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(M) \to H^2(M)$, $E \mapsto e(E)$ — изоморфизм.
6. Докажите, что отображение

$$\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{R}}(M) \to H^1(M, \mathbb{Z}/2) = H_1(M, \mathbb{Z}/2)^*,\ E \mapsto (\gamma \mapsto \text{меняется ли на } \gamma \text{ ориентация})$$

является изоморфизмом.

7*. Пусть X — n-мерное пространство, E — (вещественное) $(n+k)$-мерное расслоение на X. Докажите, что E имеет k линейно независимых сечений.
8*. Докажите, что n-мерное расслоение на n-мерном пространстве обладает сечением тогда и только тогда, когда его класс Эйлера равен нулю.
9*. Докажите, что ориентируемое трехмерное многообразие параллелизуемо.
Указание (к последним трем задачам). Последовательно продолжайте требуемые сечения с l- на $(l+1)$-остовы.