27.03.08

Листок №7

Группы Ли. Формы. Поля.

1. Пусть X – левоинвариантное векторное поле на группе Ли G. Доказать, что интегральная кривая $g(t)$ этого поля, проходящая через единицу ($g(0) = e$) группы является однопараметрической подгруппой ($g(t_1 + t_2) = g(t_1) \cdot g(t_2)$)

2. Пусть в касательной алгебре группы $G = SO(3)$ задана гладкая кривая $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда на группе G существует такая кривая $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, что $g(0) = E$ и $\dot{g}(t) \cdot g^{-1}(t) = X(t)$.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_p$ – базис касательной алгебры группы Ли G. Левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля LX_i и RX_i соответственно задают две тривиализации касательного расслоения TG. Просьба найти калибровочное преобразование, связывающее две этих тривиализации.

4. Пусть на гладком многообразии M гладко действует связная группа Ли G. Постройте естественный гомоморфизм касательной алгебры T_eG в алгебру Ли векторных полей $\{\partial\}$ на M.

Если группа действует на M эффективно (это как?), то гомоморфизм есть мономорфизм.

Если действие G свободно (это как?), то ни одно из (ненулевых) полей в образе не имеет нулей.

5. Сначала объяснить, как найти $\partial(\omega)$, где ∂ – векторное поле, а ω – дифференциальная 1-форма на M, а потом объяснить, как найти $\nabla_\partial \omega$.

6. Доказать, что $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$, для любой 1-формы ω на M.

7. Если ω – левоинвариантная 1-форма на группе Ли, то и $d\omega$ – левоинвариантная форма. Кроме того, $d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B])$, для любых двух левоинвариантных векторных полей A и B на группе G.