Задачи к экзамену по курсу А. Н. Минченко
"Системы корней и группы Вейля"
(НМУ, весна 2008)

1. Пусть Δ_0 — конечное подмножество евклидова пространства V, не содержащее нуля. Для каждого целого числа $k \geq 1$ обозначим через Δ_k множество всех $s_\alpha(\beta) \in V$, $\alpha \in \Delta_0$, $\beta \in \Delta_{k-1}$, где s_α — ортогональное отражение в V такое, что $s_\alpha \alpha = -\alpha$. Предположим, что $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ для любых $\alpha, \beta \in \Delta_0$. Доказать, что тогда множество $\Delta = \bigcup_{k \geq 0} \Delta_k$ является системой корней в $\mathbb{R}\Delta_0$.

2. Пусть Δ — система корней, все элементы которой имеют одинаковые длины. Назовём *мажорантой* всякую подсистему в Δ, состоящую из максимально возможного числа взаимно ортогональных корней.

   (a) Доказать, что все мажоранты сопряжены.

   (b) Пусть $M \subset \Delta$ — мажоранта и $N = \{w \in W : w(M) = M\}$, где W — группа Вейля системы Δ. Доказать, что орбиты действий W и N на подмножествах в M совпадают.

   (c) Верно ли, что действие $N : M$ эффективно?

3. Пусть W_a — аффинная группа Вейля системы корней пространства V, и $A \subset V$ — некоторый альков. Доказать, что всякая собственная подгруппа в W_a, порождённая аффинными отражениями относительно (некоторых) стенок A, конечна.

4. Найти образующие инварианты группы диэдра $\mathcal{D}_n$ (действующей на плоскости).

5. Пусть W — конечная группа отражений евклидова пространства V.

   (a) Доказать, что скалярный оператор $-E \in GL(V)$ принадлежит W тогда и только тогда, когда все показатели W нечетны.

   (b) Найти все возможные типы W при условии $-E \notin W$.