Задачи по ТФКП – 1

1. Нарисуйте образ координатной сетки в декартовых и полярных координатах при отображениях

$$w = z^2, \quad w = \frac{1}{z-1}, \quad w = e^z, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2. Пусть u и v – действительная и мнимая части голоморфной функтсии f, $f = u + iv$.

а) Докажите условия Коши-Римана (Cauchy-Riemann) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

б) Докажите, что функции u и v гармоничны :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

3. Пусть в односвязной области D задана гармоническая действительная функция u. Докажите, что существует действительная функция v, единственная с точносью до аддитивной константы, такая что функция $u + iv$ голоморфна. Приведите пример, показывающий, что утверждение задачи становиця неверным, если область D не предполагать односвязной.

4. Докажите, что голоморфные функции в области D образуют кольцо. Докажите, что производные суммы, произведения, частного и композиции голоморфных функций можно вычислять по обычным правилам дифференцирования.

5. Пусть f – голоморфная функция, причём $f'(z_0) \neq 0$. Докажите, что f сохраняет угол между любыми гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0.

6. Придумайте голоморфную функцию, взаимно однозначно отображающую область $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{i\alpha \mid 0 < \alpha \leq 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

7. Голоморфная функция f определена на всей комплексной плоскости, а при достаточно больших $|z|$ удовлетворяет оценке $|f(z)| < M|z|^{100}$. Докажите, что f – многочлен степени не больше 100.

8. Функция f голоморфна и ограничена в области $|z| < 1$, $z \neq 0$. Докажите, что она голоморфно продолжаеця в точку $z = 0$.

9. Для каких z имеет смысл интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \frac{dt}{t} \ ?$$

Докажите, что $\Gamma(z)$ – голоморфная функция, допускающая однозначное аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением точек $0, -1, -2, \ldots$.

10. Если ряд $\sum f_n'(z)$ равномерно шодиця в ограниченной области D, а ряд $F(z) = \sum f_n(z)$ шодиця хотя бы в одной точке, то ряд $F(z)$ равномерно шодиця в области D, причём $F'(z) = \sum f_n'(z)$.