Задачи по ТФКП – 10

Горовят, что на Римановой поверхности C *достаточно мероморфных функций*, если (i) для любых двух точек $p, q \in C$ найдётся мероморфная фунция f, такая что $f(p) \neq f(q)$ и (ii) для любой точки $p \in C$ найдётся мероморфная функция f, такая что $f'(p) \neq 0$.

1. Докажите, что на гладкой комплексной кривой, вложенной $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$, достаточно мероморфных функций.

В следующих трёх задачах предполагаеця, что на C достаточно мероморфных функций.

2. Докажите, что для любого целого m и для любой точки $p \in C$ найдёця мероморфная функция f, такая что $\operatorname{ord}_p(f) = m$.

3. Докажите, что для любых точек $p, q_1, \ldots, q_n \in C$ найдёця мероморфная функция с нулём в p и полюсами в $q_1, \ldots, q_n$.

4. Докажите, что для любых точек $p_1, \ldots, p_n \in C$ и любых целых чисел $m_1, \ldots, m_n$ найдётся мероморфная функция f, такая что $\operatorname{ord}_{p_i} f = m_i$ для всех i.

Применения теоремы Римана-Роха.

5. Докажите, что для любой точки $p \in C$ существует мероморфная функция с полюсом только в этой точке.

6. Какова размерность пространства голоморфных 2-форм на C?

7. Докажите, что для любой точки $p \in C$ найдётся голоморфная 1-форма, не обращающаяся в ноль в этой точке.

8. Докажите, что для любых точек $p_1, \ldots, p_n \in C$ и любых комплексных чисел $r_1, \ldots, r_n$ с нулевой суммой найдёця мероморфная 1-форма с простыми полюсами в точках p_i, причём вычеты в них равны r_i, а вне этих точек форма голоморфна.

9. Докажите, что любая мероморфная 1-форма разлагается в сумму 1-формы с простыми полюсами и 1-формы с нулевыми вычетами.