# Задачи по ТФКП – 2

**1.** На верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ введём риманову метрику, элемент расстояния которой задан формулой

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Докажите, что биголоморфные изоморфизмы $\mathbb{H}$ совпадают с изометриями $\mathbb{H}$. Докажите, что группа этих изометрий изоморфна $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Докажите, что непрерывная функция $f$ голоморфна в односвязной области $D$ если и только если её интеграл по любому контуру равен нулю.

**3.** Пусть 0 – существенная изолированная особенность голоморфной функции $f$. Докажите, что для любого $w$ существует последовательность $(z_n)_{n\in N}$, такая что $z_n \to 0$, а $f(z_n) \to w$.

**4.** Пусть $f$ – биголоморфный автоморфизм области $D$, обладающий хотя бы одной неподвижной точкой. Докажите, что биголоморфный изоморфизм $\varphi$ области $D$ на единичный диск $\Delta$, такой что $\varphi(z_0) = 0$, сопрягает $f$ с поворотом диска; иными словами, $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ – поворот.

**5.** Пусть $f$ – голоморфная функция в ограниченной области $D$. Известно, что если последовательность точек $z_n \in D$ стремиця к точке границы $D$, то $\limsup |f(z_n)| \le 1$. Доказать, что $|f| \le 1$ на $D$.

**6.** Пусть $S$ – семейство голоморфных функций на единичном диске $\Delta$, таких что $f(\Delta) \subset \Delta$ и $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. Найти $\sup_S f(1/2)$.

**7.** Пусть $(a_n)_{n\in N}$ – последовательность точек области $D$, сходящаяся к $a \in D$. Пусть $(f_n)_{n\in N}$ – последовательность голоморфных функций в области $D$ равномерно ограниченная на компактах (то есть, $\forall$ компакта $K \subset D$, $\exists M > 0$, такое что $\forall n, \forall z \in K, |f_n(z)| < M$). Предположим, что последовательность $(f_n(a_k))_{n\in N}$ сходится для каждого $k$. Доказать, что последовательность $(f_n)_{n\in N}$ равномерно сходится на компактах.

**8.** Докажите, что не существует биголоморфного изоморфизма (неодносвязных) областей $0 < |z| < 1$ и $1 < |z| < 2$.

**9.** Ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

сходится в кольце $r < |z| < R$ (где $0 < r < R < \infty$), но ни в каком большем кольце. При этом все коэффициенты $a_n$ – действительные неотрицательные числа. Верно ли, что $f(z)$ не может иметь аналитического продолжения в точки $z = r$ и $z = R$?