Задачи по ТФКП – 3

1. Постройте пример функции, голоморфной в единичном диске и не имеющей аналитического продолжения ни на какую бо́льшую область.

2. Функция f голоморфна и не имеет нулей в области $r < |z| < R$. Докажите, что найдутся целое число n и голоморфная функция g, такие что

$$f(z) = z^n e^{g(z)}.$$

Какой произвол имеется в выборе n и g?

3. Вычислите интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi i t x}dx}{x^2+1}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+1},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(x^3)\, dx}{x^6-x^3+1}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^3+x}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x}.$$

4. Докажите равенства

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{\pi n}\right), \\
\operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\pi n} + \frac{1}{\pi n}\right), \\
\frac{1}{(\sin z)^2} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\pi n)^2}, \\
\sin z &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right).
\end{aligned}$$

Указание : для первых двух равенств воспользуйтесь методом Коши, а для поледних двух – уже доказанными первыми двумя.

5. Найдите значение интеграла

$$\int_\gamma \frac{(z-1)(z-3)\cdots(z-99)}{z(z-2)\cdots(z-100)}dz,$$

где γ – окружность радиуса $r > 100$ ориентированная против часовой стрелки, используя как можно меньше вычислений.

6. Постройте графики Γ-функции и ζ-функции на действительной оси.

7. Докажите равенство

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

8. Для целого $k \geq 1$ докажите тождество

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\,\Gamma\left(z+\frac{2}{k}\right)\,\cdots\,\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right) = k^{-kz+1/2}\,(2\pi)^{(k-1)/2}\,\Gamma(kz).$$

Указание: положите

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\,\Gamma\left(z+\frac{2}{k}\right)\,\cdots\,\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right)}{\Gamma(kz)}$$

и попытайтесь найти φ с помощью задачи 7 и других свойств Γ-функции.

9. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}.$$