Задачи по ТФКП – 4

В этом листочке $E_k = \sum 1/(n+m\tau)^k$ – ряды Эйзенштейна.

1. Определим многозначную функцию

$$\mathcal{F}(z) := \int\limits_z^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - 60c_4u - 140c_6}}.$$

Докажите, что $\mathcal{F}(z)$ – функция, обратная $\wp_\tau(z)$, если $c_4 = E_4(\tau)$, $c_6 = E_6(\tau)$.

2. Докажите, что

$$\wp(z_1) + \wp(z_2) + \wp(z_1+z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2$$

Указание: слева и справа стоят эллиптические функции от z_1, если z_2 рассматривать как параметр.

3. Докажите тождество

$$\sum_{\substack{q+p=n \\ p,q\geq 4}} (p-1)(q-1)E_pE_q = \frac{(n-6)(n-1)(n+1)}{6}E_n.$$

4. Докажите, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ порождена матрицами

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание: группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ и подгруппа, порождённая S и T, имеют одинаковые фундаментальные области.

5. Докажите, что

$$\widehat{E}_k(\tau) = E_k(\tau)/\zeta(k) = \sum_{\mathrm{GCD}(n,m)=1} \frac{1}{(n+m\tau)^k}.$$

6. Докажите равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{B_{4k+2}}{8k+4}.$$

Указание: используйте, что $E_{4k+2}(i) = 0$.

7. Докажите, что операторы Гекке коммутируют между собой.