Задачи по ТФКП – 5

1. Пусть C – гладкая кривая степени 3 в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

а) Докажите, что на C имееця точка перегиба.

б) Докажите, что проективным преобразованием $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ кривую C можно привести к *форме Вейерштрасса*:

$$zy^2 = 4x^3 + axz^2 + bz^3, \quad b^2 + (a/3)^3 \neq 0.$$

Указание: одну из точек перегиба нужно поместить в $[0 : 1 : 0]$.

в) Пусть теперь $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$ – параметризация кривой C. Докажите, что три точки $p_1, p_2, p_3 \in C$, соотвецтвующие параметрам $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $u_1 + u_2 + u_3$ принадлежит решётке.

г) Докажите, что на C ровно 9 точек перегиба.

2. Нарисуйте фундаметальную область в $\mathbb{H}$ для действия группы

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2. \right\}$$

В следующей серии задач $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ – решётка, а $\Theta_n(\Lambda)$ – множество функций, голоморфных на $\mathbb{C}$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z), \\ f(z+\tau) &= e^{-2\pi i n z} f(z). \end{aligned}$$

В явных формулах удобнее пользоваться параметром $q = e^{2\pi i \tau}$.

3. Докажите, что функция f, голоморфная на $\mathbb{C}$ и удовлетворяющая условию $f(z) = f(z+1)$, раскладывается в ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k z}.$$

4. Если $f \in \Theta_n(\Lambda)$, какое условие это налагает на коэффициенты a_k? Докажите, что

$$\dim \Theta_n(\Lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } n < 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, \\ n, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Выпишите ряд для $f \in \Theta_1(\Lambda)$.

5. Докажите, что любая функция $f \in \Theta_n(\Lambda)$ имеет ровно n нулей в фундаментальном параллелограмме решётки. Чему равна сумма этих нулей по модулю решётки? Найдите ноль $f \in \Theta_1(\Lambda)$.

6. Докажите, что операторы

$$A(f)(z) := f\left(z + \frac{1}{n}\right), \qquad B(f)(z) := e^{2\pi i z} f\left(z + \frac{\tau}{n}\right)$$

переводят $\Theta_n(\Lambda)$ в себя. Вычислите A^n, B^n, $ABA^{-1}B^{-1}$ в пространстве $\Theta_n(\Lambda)$.

7. Докажите, что в $\Theta_n(\Lambda)$ существует базис $(\theta_p)_{p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, такой что

$$A\theta_p = \varepsilon^p \theta_p, \qquad B\theta_p = \beta\theta_{p+1},$$

$\varepsilon, \beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^n = 1$. Найдите нули θ_p.