Задачи по ТФКП – 6

Рядом Дирихле называется ряд вида $f(s) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$.

1. Докажите, что если ряд f сходится в точке $s_0 \in \mathbb{C}$, то он равномерно сходится на множестве $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0,\ |\operatorname{Arg}(s - s_0)| \leq \alpha\}$ для любого $\alpha < \pi/2$.

Указание: вам потребуется метод суммирования Абеля.

2. Докажите, что существует такая "абсцисса шодимости" $\rho \in [-\infty, +\infty]$, что на полуплоскости $\operatorname{Re} s > \rho$ ряд f шодиця к голоморфной функции, а на полуплоскости $\operatorname{Re} s < \rho$ – рашодиця.

3. Пусть абсцисса шодимости ρ ряда f конечна, причём $f(\rho)$ шодиця. Докажите, что $f(s) \to f(\rho)$ если s стемиця к ρ справа вдоль действительной оси.

4. Предположим, что все коэффициенты a_n ряда f – неотрицательные действительные числа, а абсцисса сходимости ρ – конечна. Докажите, что f нельзя аналитически продолжить в окрестность точки ρ.

Указание: положите, для удобства $\rho = 0$ и разложите f в ряд Тэйлора в $s = 1$.

Пусть p – простое число, а n – целое число, не делящаяся на p. Напомним, что *символ Лежандра* $\left(\frac{n}{p}\right)$ равен 1, если n – квадрат по модулю p и -1, если не квадрат. Напомним также *закон взаимности*:

Если p и q – различные простые числа, большие двух, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{p-1}{2}}, \qquad \left(\frac{p}{2}\right) = 1, \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}.$$

5. Пусть $a \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты. Положим $m = 4|a|$. Докажите, что существует единственный характер χ по модулю m, такой что $\chi(p) = \left(\frac{a}{p}\right)$ для всех простых чисел $p > 2$, кроме делителей a.

6. Пусть a – целое число. Предположим, что уравнение $x^2 = a$ разрешимо по модулю всех простых чисел, кроме, быть может, конечного количества. Докажите, что a являецця полным квадратом.