Задачи по ТФКП – 7

1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, а f – голоморфная функция на D, не равная константе. *Производной Шварца* f называеця мероморфная симметрическая 2-форма $S(f)$ на D:

$$S(f) = \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right] dz^2.$$

Докажите, что $S(f) = 0$ тогда и только тогда, когда f – дробно-линейное преобразование.

2. Пусть C – (не обязательно компактная) риманова поверхность.

Голоморфная 2-форма на C записываеця в локальной координате z как $\varphi(z)dz^2$, а при замене координаты $z(w)$ меняеця на $\varphi(z(w))(dz/dw)^2dw^2$.

Говорят, что на C введена *проективная структура*, если C покрыта картами $(U_i\ ;\ \varphi_i : U_i \to \mathbb{C})$, где φ_i – однолистные (инъективные) мероморфные функции, причём на пересечении $U_i \cap U_j$ имеем $\varphi_i = (a\varphi_j + b)/(c\varphi_j + d)$.

Докажите, что если на C заданы две проективные структуры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, то производная Шварца позволяет определить их разность $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$, которая будет хорошо определённой голоморфной 2-формой на C. Докажите, что

$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = -(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1), \qquad (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3) = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3,$$

то есть, множество проективных структур образует аффинное пространство, ассоциированное с линейным пространством голоморфных 2-форм на C.

3. Пусть области D_1 и D_2 не имеют общих точек и граничат друг с другом по кусочно-гладкой кривой l. Пусть функции f_1 и f_2 – голоморфны в D_1 и D_2 и непрерывны на замыкании этих областей, причём на l имеем $f_1 = f_2$. Докажите, что f_2 являеця аналитическим продолжением f_1 и наоборот.

4. Пусть область D лежит с одной стороны от действительной оси, причём отрезок l действительной оси являеця частью границы D. Предположим, что f – голоморфна на D и непрерывна на её замыкании, а на l принимает действительные значения. Докажите, что f можно аналитически продолжить через отрезок l в область D', симметричную D относительно действительной оси.

5. Докажите, что между кольцами

$$0 < r_1 < |z| < R_1 < \infty \quad \text{и} \quad 0 < r_2 < |z| < R_2 < \infty$$

имеется биголоморфный изоморфизм тогда и только тогда, когда $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Указание: биголоморфный изоморфизм колец поднимаеця до биголоморфного изоморфизма их универсальных накрытий.

6. Постройте подгруппу G группы биголоморфных авторморфизмов верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, такую чтобы $\mathbb{H}/G$ было диффеоморфно поверхности рода 2.

Указание: замостите $\mathbb{H}$ правильными 8-угольниками с углами в $45°$.