Задачи по ТФКП – 8

1. В $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ рассмотрим следующие (не обязательно гладкие) алгебраические кривые:

а) $y^2 = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$,

б) $y^3 = x^5$,

в) $y^6 = x^2(x-1)^3$.

Каждую из этих кривых C можно спроектировать на координатную ось x. Согласно теореме Римана, если из C выколоть все особые точки этой проекции, то полученную кривую можно однозначно достроить до гладкой компактной кривой $\widehat{C}$ с голоморфным отображением $\widehat{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Найдите род кривой $\widehat{C}$.

2. Кривая, заданная в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ однородным многочленом степени d оказалась гладкой. Какой у неё род?

3. Чему равна площадь компактной римановой поверхности рода g с метрикой постоянной кривизны -1?

4.

а) Пусть Δ – единичный диск, G – подгруппа группы его биголоморфных автоморфизмов, причём Δ/G – поверхность рода g. Докажите, что у G имееця фундаментальная область в виде $4g$-угольника, у которого G отождествляет стороны через одну в порядке $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

б) Чему равна сумма углов этого $4g$-угольника?

в) Докажите, что если нарисовать в Δ любой $4g$-угольник с нужной суммой углов и с $2g$ нужными парами сторон равной длины, то группу G можно однозначно восстановить.

д) Вычислите размерность пространства таких многоугольников, с точностью до изометрий. Ответ: $6g - 4$.

5. На двух поверхностях с метрикой постоянной кривизны -1 имееця по замкнутой геодезической одной и той же длины l. Докажите, что ε-окрестности этих геодезических на поверхностях изометричны друг другу для достаточно малого ε.

6. На верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ возьмём полоску $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ и отождествим её края по формуле $z \sim 2z + 1$. Постройте область плоскости, биголоморфную получившейся римановой поверхности.