# Задачи по ТФКП – 9

**1.** Пусть $Q$ – целочисленная кососимметрическая форма на решётке $\Lambda = \mathbb{Z}^{2n}$. Предположим, что $Q \neq 0$ и пусть $d = Q(\lambda, \lambda') > 0$ – минимальное положительное значение $Q$ на паре векторов решётки. Докажите, что $\Lambda$ являеця прямой суммой подрешётки, порождённой $\lambda, \lambda'$, и подрешётки $Q$-ортогональной $\lambda, \lambda'$.

**2.** В предположениях предыдущей задачи докажите, что $d|Q(\mu, \mu')$ для любых $\mu, \mu' \in \Lambda$.

**3.** Докажите, что у $\Lambda$ существует базис, в котором матрица формы $Q$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & d_n \\ -d_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -d_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

причём $d_i \geq 0$, и имеют место делимости $d_1|d_2|\ldots|d_n$ (здесь мы считаем, что 0 делит 0).

**4.** Докажите, что набор $(d_1, \ldots, d_n)$ являеця полным инвариантом формы $Q$ относительно смен базиса $\Lambda$.

**5.** На решётке периодов компактной римановой поверхности $C$ рода $g$ имеется естественная кососимметрическая целочисленная 2-форма $Q$, а именно индекс пересечения в $H_1(C, \mathbb{Z})$. Докажите, что соответствующий набор $(d_1, \ldots, d_g)$ состоит из единичек.

**6.** Пусть $V$ – $n$-мерное комплексное пространство. Говорят, что кососимметрическая линейная 2-форма $Q$ на $V$ имеет *тип* $(1,1)$, если её можно записать в виде $Q = \sum c_{ij} dz_i d\bar{z}_j$ (то есть без членов вида $dz_i dz_j$ и $d\bar{z}_i d\bar{z}_j$) в каких-нибудь координатах $z_1, \ldots, z_n$ в $V$.

Пусть $\Lambda \subset V$ – решётка ранга $2n$. Докажите, что следующие условия равносильны:

а) На $V$ существует кососимметрическая 2-форма $Q$ типа $(1,1)$, целочисленная на $\Lambda$.

б) У решётки найдётся базис $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$ а у пространства $V$ базис $(e_1, \ldots, e_n)$, такие что матрица, выражающая $\lambda_i$ через $e_j$ имеет вид

$$(D, Z), \quad \text{где} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

$Z$ симметрична, а $\operatorname{Im} Z$ положительно определена.

**7.** В $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ класс когомологий, Пуанкаре двойственный гиперплоскости, представляется дифференциальной *2-формой Фубини-Штуди*:

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{1 + \sum |z_i|^2} + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\bar{z}_i z_j dz_i \wedge d\bar{z}_j}{(1 + \sum |z_i|^2)^2}.$$

Предположим, что тор $M = V/\Lambda$ вкладывается в $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$, как комплексное подмногообразие: $j : M \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$. Обозначим через $Q$ усреднение по всем сдвигам из $M$ формы $j^*(\omega)$. Докажите, что $Q$ – кососимметрическая 2-форма типа $(1,1)$, целочисленная на $\Lambda$.

**8.** Постройте пример решётки $\Lambda \in \mathbb{C}^n$, такой что $\mathbb{C}^n/\Lambda$ не вкладывается в проективное пространство.