Экзамен по ТФКП

18.05.2008

Оценка равняеця $\min(5, \max(2, z))$, где z – количество решённых задач.

1. Существует ли положительная непостоянная гармоническая функтсия на области $D \subset \mathbb{C}$, если

а) $D = \mathbb{C}$? б) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$? в) $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

2. Найти общий вид рациональных функций f, таких что $|f| = 1$ на единичной окружности $|z| = 1$.

3. Пусть φ – непрерывная функция на замкнутом единичном диске $|z| \leq 1$. Введём такую меру неголоморфности φ:

$$m(\varphi) = \inf_f \sup_{|z|\leq 1} |f(z) - \varphi(z)|,$$

где нижняя грань $\inf_f$ берётся по всем функциям f, голоморфным в некоторой области, содержащей диск $|z| \leq 1$.

а) Найдите $m(\varphi)$ для $\varphi(z) = |z|$.

б) Докажите, что $m(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда φ голоморфна на открытом диске $|z| < 1$.

4. Вычислите сумму $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^4+4}$.

5. Пусть $\sigma_{2k-1}(n) = \sum\limits_{d|n} d^{2k-1}$ есть сумма $(2k-1)$-вых степеней положительных делителей n. Для $k \geq 2$ функция $\alpha_{2k}(s)$ определяеця как

$$\alpha_{2k}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s},$$

для тех s, при которых этот ряд сходится.

а) Докажите, что α_{2k} продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$.

б) Докажите, что функция $\beta_{2k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\alpha_{2k}(s)$ удовлетворяет равенству $\beta(s) = \beta(2k - s)$.

в) Найдите все полюса α_{2k}.

6. Кривая задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением $y^2 = (x - a_1)\cdots(x - a_{2g+2})$, где $a_1, \ldots, a_{2g+2}$ – попарно различные комплексные числа. По теореме существования Римана эту кривую можно однозначно дополнить до компактной римановой поверхности C так, чтобы x и y были на C мероморфными функциями. Найдите в явном виде g линейно независимых голоморфных 1-форм на C.

7. Пусть C – компактаная риманова поверхность рода 2, K – дивизор какой-нибудь голоморфной 1-формы на ней, а $H^0(K)$ – двумерное пространство голоморфных 1-форм. Сопоставим (если удасця) точке $p \in C$ голоморфную 1-форму с нулём в этой точке.

а) Докажите, что получилось хорошо определённое отображение $f : C \to \mathbb{P}H^0(K)$.

б) Докажите, что f имеет степень два и найдите количество критических точек f.