Решения экзаменационных задач по ТФКП

1. Существует ли положительная непостоянная гармоническая функтсия на области $D \subset \mathbb{C}$, если

а) $D = \mathbb{C}$? б) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$? в) $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

Решение.

а) Нет. Если u – гармоническая функция, то $f = 2\int \frac{\partial u}{\partial z} dz$ – голоморфная функция с действительной частью u. По малой теореме Пикара f принимает все значения, кроме, может быть, одного – в частности, значения с отрицательной вещественной частью.

б) Нет. Если u – положительная гармоническая функция на $\mathbb{C}^*$, то $v(z) = u(e^z)$ – положительная гармоническая функция на $\mathbb{C}$.

в) Да. Например $\mathrm{Re}\,(\sqrt{z})$, где выбрана ветвь квадратного корня с положительной вещественной частью.

2. Найти общий вид рациональных функций f, таких что $|f| = 1$ на единичной окружности $|z| = 1$.

Ответ: $f(z) = \alpha z^k \prod_n \frac{z-a_n}{1-\overline{a}_n z}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, а $a_n \in \mathbb{C}^*$ – конечная последовательность точек.

Доказательство. Легко проверить, что z^k, а также

$$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

удовлетворяет условию. Если рациональная функция f по модулю равна единице на единичной окружности, то, разделив её на z в подходящей степени и на конечное количество функций вида f_a, мы можем добиться, чтобы у частного g не осталось ни нулей ни полюсов в диске $|z| \le 1$. После этого, по принципу максимума $|g| \le 1$ и $|1/g| \le 1$ в единичном диске, то есть $|g| = 1$ при $|z| \le 1$, из чего уже следует, что g – константа.

3. Пусть φ – непрерывная функция на замкнутом единичном диске $|z| \le 1$. Введём такую меру неголоморфности φ:

$$m(\varphi) = \inf_f \sup_{|z|\le 1} |f(z) - \varphi(z)|,$$

где нижняя грань $\inf_f$ берётся по всем функциям f, голоморфным в некоторой области, содержащей диск $|z| \le 1$.

а) Найдите $m(\varphi)$ для $\varphi(z) = |z|$.

б) Докажите, что $m(\varphi) = 0$ тогда и только тогда, когда φ голоморфна на открытом диске $|z| < 1$.

Решение.

а) Ответ: $m(\varphi) = 1/2$. Действительно, если взять $f(z) = 1/2$, то $\sup |f - \varphi| = 1/2$. Меньшего значения добиться невозможно, поскольку если $|f(0)| < 1/2$, то, по принципу максимума,

$$\sup_{|z|=1} |\varphi(z) - f(z)| = \sup_{|z|=1} |1 - f(z)| \geq |1 - f(0)| > 1/2.$$

б) Если $m(\varphi) = 0$, то существует последовательность голоморфных функций f_n, которая сходится к φ равномерно в области $|z| < 1$. По теореме Вейерштрасса, предел φ – также голоморфная функция на $|z| < 1$. Наоборот, если φ голоморфна на $|z| < 1$, положим $f_n(z) = \varphi(\frac{n-1}{n}z)$. Из равномерной непрерывности φ следует, что f_n сходится к φ равномерно на $|z| \leq 1$.

4. Вычислите сумму $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^4+4}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)\,(z^4 + 4(2\pi)^4)}.$$

Нетрудно убедиться (и на лекциях было), что $1/(e^z - 1)$ ограничена на квадрате $\max(|x|, |y|) = (2k+1)\pi$. Следовательно, интеграл f по этому квадрату стремится к нулю при $k \to \infty$. Иными словами, сумма всех вычетов f на $\mathbb{C}$ равна нулю.

Вычет f в точке $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$, равен

$$\frac{1}{(2\pi)^4(n^4 + 4)}.$$

Вычет f в точке $z_0 = 2\pi(\pm 1 \pm i)$ равен

$$\frac{1}{(e^{z_0} - 1)4z_0^3} = -\frac{z_0}{16(2\pi)^4(e^{\pm 2\pi} - 1)}.$$

Суммируя это выражение по $z_0 = 2\pi(\pm 1 \pm i)$, получаем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^4 + 4} = \frac{\pi}{4\,\mathrm{th}\,\pi},$$

откуда

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^4+4}=\frac{1}{8}+\frac{\pi}{8\operatorname{th}\pi}.$$

5. Пусть $\sigma_{2k-1}(n)=\sum\limits_{d|n}d^{2k-1}$ есть сумма $(2k-1)$-вых степеней положительных делителей n. Для $k\geq 2$ функция $\alpha_{2k}(s)$ определяеця как

$$\alpha_{2k}(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s},$$

для тех s, при которых этот ряд сходится.

а) Докажите, что α_{2k} продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$.

б) Докажите, что функция $\beta_{2k}(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\alpha_{2k}(s)$ удовлетворяет равенству $\beta(s)=\beta(2k-s)$.

в) Найдите все полюса α_{2k}.

Решение. Имеем

$$\sigma_{2k-1}(n)<n^{2k-1}+(n/2)^{2k-1}+(n/3)^{2k-1}+\cdots=n^{2k-1}\zeta(2k-1).$$

Следовательно ряд, определяющий α_{2k}, заведомо сходится при $\operatorname{Re}s>2k$, так что есть что аналитически продолжать.

Напомним, что ряд Эйзенштейна E_{2k} имеет вид

$$E_{2k}(\tau)=c\left(a+\sum\sigma_{2k-1}(n)e^{2\pi in\tau}\right),\ \text{где}\ \ a=-\frac{B_{2k}}{4k},\ c=(-1)^k\frac{2(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k-1)!},$$

но конкретные значения a и c нам не понадобяця, мы будем пользоваться только тем, что $a,c\neq 0$.

Ряд E_{2k} является модулярной формой веса $2k$, в частности

$$E_{2k}(-1/\tau)=\tau^{2k}E_{2k}(\tau).$$

При $\operatorname{Re}s>2k$ имеем

$$\beta_{2k}(s)=(2\pi)^{-s}\ \sum\frac{\sigma_{2k-1}(n)}{n^s}\ \int_0^\infty e^{-t}t^s\frac{dt}{t}$$

$$=\sum_n\sigma_{2k-1}(n)\int_0^\infty e^{-t}\,(t/2\pi n)^s\,\frac{d(t/2\pi n)}{(t/2\pi n)}$$

$$= \int_0^\infty \left(\sum_n \sigma_{2k-1}(n) e^{-2\pi n t} \right) t^s \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{E_{2k}(it)}{c} - a \right) \, t^s \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{c} \mathcal{M}(E_{2k}(it)),$$

где $\mathcal{M}$ – преобразование Меллина. (Для красоты, константу a можно убрать, поскольку преобразование Меллина константы равно нулю.)

Глядя на ряд, задающий E_{2k}, видно, что $\frac{E_{2k}(it)}{c} - a$ убывает экспоненциально при $t \to \infty$. Иными словами, E_{2k}/c имеет очень простое асимптотическое разложение на бесконечности:

$$E_{2k}(it)/c = a + O(1/t^n)$$

для любого $n > 0$.

Из свойства модулярности $E_{2k}(i/t) = t^{2k} E_{2k}(it)$, получаем асимптотическое разложение $E_{2k}(it)/c$ при $t \to 0$:

$$E_{2k}(it)/c = \frac{a}{t^{2k}} + O(t^n)$$

для любого $n > -2k$.

Таким образом, $\beta_{2k}(s)$ – преобразование Меллина $E_{2k}(it)$ – является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости и имеет ровно два простых полюса: $s = 0$ и $s = 2k$. Из этого следует, что $\alpha_{2k}(s)$ также мероморфна на $\mathbb{C}$ и имеет ровно один простой полюс в $s = 2k$ (полюс в нуле исчезает при делении на $\Gamma(s)$).

Делая замену переменной $t \to 1/t$ в интеграле

$$\beta_{2k}(s) = \frac{1}{c} \int_0^\infty E_{2k}(it) \, t^s \frac{dt}{t},$$

получаем равенство $\beta(s) = \beta(2k - s)$.

6. Кривая задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением $y^2 = (x - a_1) \cdots (x - a_{2g+2})$, где $a_1, \ldots, a_{2g+2}$ – попарно различные комплексные числа. По теореме существования Римана эту кривую можно однозначно дополнить до компактной римановой поверхности C так, чтобы x и y были на C мероморфными функциями. Найдите в явном виде g линейно независимых голоморфных 1-форм на C.

Решение. Искомые 1-формы задаются так:

$$\frac{dx}{y}, \quad \frac{xdx}{y}, \ \ldots, \ \frac{x^{g-1}dx}{y}.$$

Рассмотрим сперва точки C, лежащие в $\mathbb{C}^2$. Очевидно, что приведённые 1-формы голоморфны в точках $y \neq 0$. В окрестности точки $x = a_i$, $y = 0$ координата y являеця локальной координатой на кривой, а $x = a_i + y^2 + O(y^3)$. Форма dx/y имеет вид $(2y + O(y^2))dy$, то есть она голоморфна в этой точке. Следовательно голоморфны и остальные 1-формы.

Осталось проверить, что 1-формы голоморфны также в точках, добавленных к кривой при компактификации. Поскольку C не ветвиця над $x = \infty$, таких точек две, и $t = 1/x$ являеця локальной координатой в каждой из них. В этой локальной координате 1-форма $x^k dx/y$ записываеця так (знак зависит от того, какую из двух добавленных точек мы рассматриваем):

$$\frac{\frac{1}{t^k}\, d(\frac{1}{t})}{\pm\sqrt{(\frac{1}{t} - a_1)\cdots(\frac{1}{t} - a_{2g+2})}} = \pm t^{g+1-k-2} \frac{dt}{\sqrt{(1 - ta_1)\cdots(1 - ta_{2g-2})}}.$$

То есть форма голоморфна в окрестности $t = 0$ если $k \leq g - 1$, что выполнено в приведённых нами формах.

Заметим, наконец, что у всех g форм различные порядки нулей в двух добавленных точках, из чего вытекает, что формы линейно независимы.

7. Пусть C – компактаная риманова поверхность рода 2, K – дивизор какой-нибудь голоморфной 1-формы на ней, а $H^0(K)$ – двумерное пространство голоморфных 1-форм. Сопоставим (если удасця) точке $p \in C$ голоморфную 1-форму с нулём в этой точке.

а) Докажите, что получилось хорошо определённое отображение $f : C \to \mathbb{P}H^0(K)$.

б) Докажите, что f имеет степень два и найдите количество критических точек f.

Решение. **а)** Введём в $H^0(K)$ базис из двух голоморфных 1-форм (ω_1, ω_2). Положим $\varphi(z) = \omega_1/\omega_2$. Это – мероморфная функция на C. Легко видеть, что эта функция фактически и являеця отображением f. Более точно, $f(z) = [-1 : \varphi(z)] = [-1/\varphi : 1]$, где z – точка C, а однородные координаты записываюця в базисе (ω_1, ω_2). Действительно, 1-форма $\omega(\xi) = -\omega_1(\xi) + \varphi(z)\omega_2(\xi)$ имеет ноль в точке $\xi = z$.

б) У любой голоморфной формы на поверхности рода g ровно $2g-2$ нуля с учётом кратностей. В данном случае, $2g-2=2$, следовательно функция φ имеет степень не больше двух.

Если φ имеет степень ноль, то она голоморфна. Но голоморфная функция на компакной римановой поверхности – константа по принципу максимума. Получаеця, что ω_1 пропорциональна ω_2, и они не могут образовывать базис.

Если φ имеет степень один, то она задаёт изоморфизм между C и $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Но кривая рода 2 не может быть изоморфна кривой рода 0.

Выходит, что φ имеет степень два. По формуле Римана-Гурвица

$$\begin{array}{ccccccl} \chi(C) & = & \deg f & \cdot & \chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) & - & \#\,\text{критических точек}, \\ -2 & = & 2 & \cdot & 2 & - & \#\,\text{критических точек}, \end{array}$$

откуда критических точек 6.