Теоретические вопросы по ТФКП

1. Докажите принцип максимума, лемму Шварца и теорему Лиувилля.

2. Докажите, что если последовательность голоморфных функций f_n равномерно шодиця на любом компакте в области D, то предел – голоморфная функция.

3. Сформулируйте и докажите принцип компактности для голоморфных функций в области $D \subset \mathbb{C}$.

4. Сформулируйте и докажите теорему униформизации Римана.

5. Сформулируйте и докажите теорему о вычетах.

6. Постройте голоморфную функцию с заданными нулями в $\mathbb{C}$.

7. Докажите, что $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s$ аналитически продолжаеця до функции, мероморфной на $\mathbb{C}$ и имеющей единственный простой полюс в единице.

8. Докажите, что для функции $\xi(s) = \pi^{s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2)$ выполнено равенство $\xi(s) = \xi(1-s)$.

9. Дайте определение функции Вейерштрасса $\wp$. Докажите, что она двяко-периодическая. Выведите алгебраическое уравнение, связывающее $\wp$ и $\wp'$.

10. Дайте определение модулярной формы и рядов Эйзенштейна. Докажите, что кольцо модулярных форм изоморфно $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.

11. Докажите, что $q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$ – модулярная форма веса 12.

12. Пусть χ – характер по модулю m. Определите функцию $L_\chi(s)$. Докажите, что если $\chi = 1$, то L_χ мероморфна и имеет простой полюс в $s = 1$, а если $\chi \neq 1$, то L_χ голоморфна и не равна нулю в $s = 1$.

13. Докажите теорему Дирихле.

14. Пусть ω – голоморфная 1-форма на компактной римановой поверхности рода g. Докажите, что если интегралы ω по A-циклам равны нулю, то $\omega = 0$.