11. Топология, лекция 11: Пространство непрерывных отображений

11.1. Топология равномерной сходимости на $C(X,Y)$

Пусть X – компактное топологическое пространство, Y – метрическое пространство, а $C(X,Y)$ – множество непрерывных отображений из X в Y. Напомним, что на $C(X,Y)$ определена sup**-метрика** по формуле

$$d(f,f') = \sup_{x\in X} d(f(x), f'(x)).$$

Конечность супремума следует из компактности X (докажите).

Напомним, что **окрестность** подмножества Z топологического пространства – это открытое множество, которое содержит Z.

Пусть Δ_ε обозначает окрестность диагонали Δ в $Y\times Y$, заданную формулой

$$\Delta_\varepsilon = \{(y,y') \in Y\times Y \mid d(y,y') < \varepsilon\}.$$

Для каждого непрерывного отображения $\varphi:\ X \longrightarrow Y$, рассмотрим $\Phi = \varphi \times \mathsf{Id}_Y :\ X\times Y \longrightarrow Y\times Y$. Легко видеть, что график Γ_φ получается как $\Gamma_\varphi = \varphi^{-1}(\Delta)$.

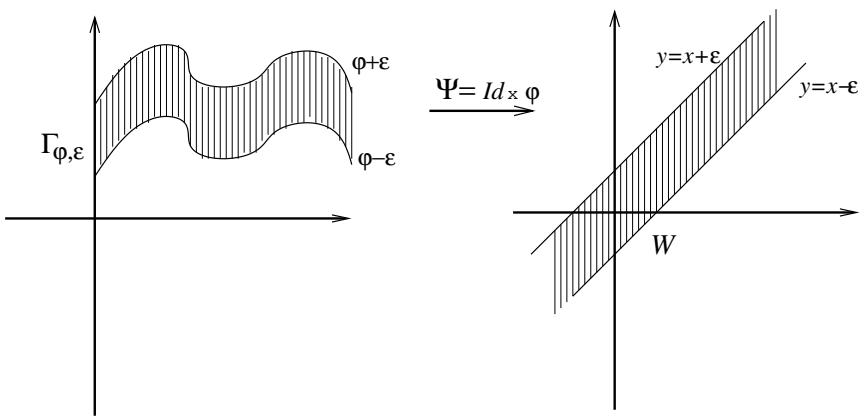
Пусть $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} := \Phi^{-1}(\Delta_\varepsilon)$ – окрестность Γ_φ, полученная как прообраз Δ_ε.

Замечание 11.1. На прошлой лекции мы доказали, что $d(\varphi,\varphi') < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда график $\Gamma_{\varphi'}$ целиком лежит в $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$.

Определение 11.2. Пусть $X\times C(X,Y) \stackrel{\mathsf{ev}}{\longrightarrow} Y$, переводит пару (x,φ) в $\varphi(x)$. Это отображение называется **отображение эвалюации** (вычисления).

Основное утверждение этой лекции – следующая теорема.

Теорема 11.3: Пусть X – компактное топологическое пространство, Y – метрическое пространство, а $C(X,Y)$ – множество непрерывных



Множество $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ *получено как* $\Psi^{-1}(W)$

отображений из X в Y, с топологией равномерной сходимости. Предположим, что у X есть счетная база окрестностей в точке. Тогда отображение эвалюации $X \times C(X,Y) \stackrel{\mathsf{ev}}{\longrightarrow} Y$ непрерывно. Более того, топология равномерной сходимости – самая слабая топология, в которой ev непрерывно.

Замечание 11.4. Из Теоремы 11.3 сразу следует, что топология равномерной сходимости на $C(X,Y)$ целиком определяется топологической структурой X и Y.

Замечание 11.5. Напомним, что отображение топологических пространств называется **секвенциально непрерывным**, если оно переводит пределы последовательностей в пределы последовательностей. Секвенциальная непрерывность ev немедленно следует (проверьте) из неравенства треугольника

$$d(f_i(x_i), f(x)) \leqslant d(f_i(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x))$$

где $\{f_i\} \in C(X,Y)$ – последовательность функций, равномерно сходящихся к f, а $\{x_i\} \in X$ – последовательность точек, сходящихся к x.

Замечание 11.6. Для пространств со счетной базой окрестностей в точке, секвенциальная непрерывность равносильна обычной (докажите это). Поэтому $X \times C(X,Y) \stackrel{\mathsf{ev}}{\longrightarrow} Y$ непрерывно, в предположении, что у X есть счетная база окрестностей в точке (докажите).

Мы завершим доказательство Теоремы 11.3 в конце следующей секции.

11.2. Топология, заданная окрестностями графика

Пусть X, Y – топологические пространства, а $C(X,Y)$ – множество всех непрерывных отображений из X в Y.

Пусть W – подмножество в $X \times Y$. Рассмотрим множество $\mathfrak{S}_W$ в $C(X,Y)$, состоящее из всех непрерывных отображений $f \in C(X,Y)$ таких, что график Γ_f лежит в W. Пусть $C'(X,Y)$ – пространство непрерывных функций, с топологией, базой которой является множество всех $\mathfrak{S}_W$, где W – объединение конечного числа открытых подмножеств $U \times V \subset X \subset Y$ с подмножествами вида $K \times Y$, где $K \subset X$ замкнут.

Рассмотрим отображение $X \times C'(X,Y) \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} X \times Y$, переводящее (x,φ) в $(x,\varphi(x))$. Для каждого открытого множества $U \times V \subset X \times Y$, пусть

$$W := U \times V \cup (X \backslash U) \times Y.$$

Из определения $\mathfrak{S}_W$ сразу следует, что

$$\Phi^{-1}(U \times V) = U \times \mathfrak{S}_W.$$

Действительно, для каждого $\varphi \in C(X,Y)$, образ $\varphi(U)$ лежит в V тогда и только тогда, когда график φ лежит в W. Следовательно, отображение $\Phi:\ X \times C'(X,Y) \longrightarrow X \times Y$ непрерывно. Поскольку отображение эвалюации получается как композиция Φ и проекции, мы получаем, что $X \times C'(X,Y) \stackrel{\mathsf{ev}}{\longrightarrow} Y$ непрерывно.

По определению, база открытых множеств в $C'(X,Y)$ порождена множествами вида $\mathfrak{S}_W$, где $W = U \times V \cup (X \backslash U) \times Y$. Эта база получается из прообразов $\pi(\Phi^{-1}(A))$, где $\pi:\ X \times C'(X,Y) \longrightarrow C'(X,Y)$ – естественная проекция, а $A = U \times V$ открыто в $X \times Y$. Поэтому топология $C'(X,Y)$ есть слабейшая топология, в которой Φ непрерывно.

Замечание 11.7. Непрерывность $X \times C(X,Y) \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} X \times Y$ в какой-то топологии на $C(X,Y)$ равносильна непрерывности ev в этой же самой топологии. Действительно, ev получается композицией Φ и проекции, а Φ получается как произведение ev и проекции $X \times C(X,Y) \longrightarrow X$.

Мы получили, что $C'(X,Y)$ – слабейшая топология, в которой непрерывно отображение ev. Для доказательства Теоремы 11.3 осталось доказать, что топология $C'(X,Y)$ эквивалентна топологии $C(X,Y)$.

Пусть X – компактное топологическое пространство со счетной базой окрестностей в точке a Y – метрическое пространство. Для доказательства Теоремы 11.3, рассмотрим тождественное отображение $C'(X,Y) \stackrel{\mathsf{Id}}{\longrightarrow} C(X,Y)$. База открытых множеств в $C(X,Y)$ состоит из множеств вида $\mathfrak{S}_{\Gamma_{\varphi,\varepsilon}}$ (Замечание 11.1). Такие множества открыты в $C'(X,Y)$, по определению топологии на $C'(X,Y)$. Поэтому $C'(X,Y) \stackrel{\mathsf{Id}}{\longrightarrow} C(X,Y)$ непрерывно, то есть топология, определенная $\mathfrak{S}_W$, сильнее, чем топология равномерной сходимости.

С другой стороны, поскольку $C'(X,Y)$ – слабейшая топология, в которой непрерывно отображение эвалюации, а $X \times C(X,Y) \stackrel{\mathsf{ev}}{\longrightarrow} Y$ непрерывно, топология $C'(X,Y)$ слабее, чем топология $C(X,Y)$. Мы доказали, что эти топологии эквивалентны.

Утверждение 11.8: Пусть Y – компактное метрическое пространство, Z – метрическое пространство, а X компактно. Тогда отображение композиции $C(X,Y) \times C(Y,Z) \stackrel{A}{\longrightarrow} C(X,Z)$ непрерывно.

Доказательство: Отображение $C(X,Y) \times C(Y,Z) \stackrel{A}{\longrightarrow} C(X,Z)$ непрерывно тогда и только тогда, когда

$$X \times C(X,Y) \times C(Y,Z) \stackrel{\mathsf{Id}_X \times A}{\longrightarrow} X \times C(X,Z)$$

непрерывно. По Теореме 11.3, база топологии на $X \times C(X,Z)$ порождается $\mathsf{ev}^{-1}(U)$, где $U \subset Z$ – открытое множество. Поэтому для доказательства непрерывности композиции, достаточно доказать, что отображение $\mathsf{ev}^2(X \times C(X,Y) \times C(Y,Z)) \longrightarrow Z$, $(x,\varphi,\psi) \longrightarrow \psi(\varphi(x))$ непрерывно. С другой стороны, ev^2 получается применением эвалюации два раза: первый раз $(x,\varphi,\psi) \longrightarrow (\varphi(x),\psi)$, а второй раз – $(\varphi(x),\psi) \longrightarrow \psi(\varphi(x))$, и каждая из этих эвалюаций непрерывна, что следует из Теоремы 11.3. ■

11.3. Замечания

Топология на $C(X,Y)$, определенная выше, является примером **открыто-компактной топологии**, которая определена для любого локально

компактного X и любого (не обязательно метризуемого) Y. Для компактного подмножества $K \subset X$ и открытого $U \subset Y$, пусть $\mathcal{V}(K,U)$ – множество отображений, переводящих K в U. Открыто-компактная топология (compact-open topology) на $C(X,Y)$ – топология, заданная базой $\mathcal{V}(K,U)$.

Задача 11.9 (*). Докажите, что открыто-компактная топология эквивалентна топологии равномерной сходимости, если X компактно, а Y метризуемо.

Задача 11.10 (*). Докажите, что отображение композиции $C(X,Y) \times C(Y,Z) \longrightarrow C(X,Z)$ непрерывно, для открыто-компактной топологии, если X, Y, Z хаусдорфовы.

Ralph Hartzler Fox
(1913 - 1973)

Открыто-компактную топологию изобрел в 1945-м году Ральф Фокс, ученик Соломона Лефшеца, который был научным руководителем множества знаменитых математиков, в частности Джона Милнора и Барри Мазура.

12. Топология, лекция 12: Связные пространства

12.1. Свойства связных подмножеств

Определение 12.1. Пусть M – топологическое пространство, а $A \subset M$ – его подмножество, которое открыто и замкнуто. Тогда A называется **открыто-замкнутым** (clopen).

Замечание 12.2. Очевидно, M и $\emptyset$ открыто-замкнуты. Если у M есть открыто-замкнутое подмножество U, не равное M и $\emptyset$, то M можно разбить в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств, U и $M \backslash U$. Обратное тоже верно (докажите).

Определение 12.3. Пусть M – топологическое пространство, а $X \subset M$ – его подмножество, рассмотренное как топологическое пространство с индуцированной топологией. Тогда X называется **связным** (connected), если верны следующие равносильные условия

(i) X не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме X и $\emptyset$.

(ii) X не может быть разбит в объединение двух непересекающихся, непустых, открытых подмножеств

Утверждение 12.4: Связное подмножество отрезка $[0,1]$ – это отрезок, интервал или полуинтервал.[1]

Доказательство: Пусть $X \subset [0,1]$ – подмножество, не являющееся отрезком, интервалом или полуинтервалом. Тогда в $[0,1] \backslash X$ содержится точка α такая, что в X есть точка $x > \alpha$ и точка $y < \alpha$. В этом случае, X разбивается в объединение двух непустых, открытых подмножеств $X \cap [0, \alpha[$ и $X \cap]\alpha, 0]$.

Чтобы доказать, что отрезок, интервал или полуинтервал I связны, возьмем разбиение I в объединение двух непересекающихся, открытых подмножеств X и Y, и пусть $x \in X$ – любая точка. Для простоты, положим, что I – интервал (доказательство для отрезка и полуинтервала аналогично). Пусть I_x – объединение всех интервалов, лежащих в X и

[1] Точка и пустое множество считаются частными случаями отрезка и интервала.

содержащих x. Тогда I_x это интервал $]\alpha, \beta[\subset I$, причем либо α, либо β не является концом I. Пусть, к примеру, α это не конец I. Тогда α содержится Y. Поскольку Y открыто, из этого должно следовать, что Y содержит некоторую окрестность точки α, но это невозможно, потому что α является предельной точкой X. ■

Замечание 12.5. Замыкание $\bar{Z}$ связного подмножества Z всегда связно. Действительно, если $\bar{Z}$ удалось разбить в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств U и V, $U \cap Z$ и $V \cap Z$ открыты и не пересекаются. Поскольку Z плотно в $\bar{Z}$, эти множества непусты (докажите).

Замечание 12.6. Пусть X связно, а $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда $f(Y)$ связно. Действительно, если $f(Y)$ разбито в объединение непустых непересекающихся открытых подмножеств, их прообразы – непересекающиеся открытые подмножества Y

Следствие 12.7: Если $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на связном множестве то $f(X)$ это отрезок, интервал или полуинтервал. В частности, f принимает все промежуточные значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Понятие связности изучали многие математики в XIX веке, но математически строгое определение связного множества первым ввел Анри Пуанкаре.

12.2. Компоненты связности

Замечание 12.8. Пусть X и Y – два пересекающихся связных подмножества топологического пространства M. Тогда $X \cup Y$ тоже связно (докажите это).

Определение 12.9. Пусть $x \in M$ – точка топологического пространства, а A_x – объединение всех связных подмножеств M, содержащих x. В силу вышесказанного, A_x связно. Множество A_x называется **компонентой связности** точки x.

Замечание 12.10. Каждое топологическое пространство является непересекающимся объединением своих компонент связности.

Jules Henri Poincaré
(1854 - 1912)

Замечание 12.11. Если M представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств U и V, каждая компонента связности M содержится целиком в U или в V (докажите).

Напомним, что непрерывное отображение называется **открытым**, если оно переводит открытые множества в открытые.

Замечание 12.12. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями. Предположим, что X представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств U и V. Поскольку слои f связны, подмножества U и V содержат каждый слой целиком. Поэтому $U = f^{-1}(U_1), V = f^{-1}(V_1)$, причем U_1 и V_1 не пересекаются. Поскольку f открыто, U_1 и V_1 открыты и непусты.

Следствие 12.13: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями, и Y связно. Тогда X связно. ■

Замечание 12.14. Из этого следует, что произведение связных пространств X и Y связно. Действительно, отображение проекции $\pi : X \times Y$ открыто (докажите) и имеет связные слои.

Замечание 12.15. Если $f : X \longrightarrow Y$ не открыто, то связность X не вытекает из связности Y и слоев f. В качестве примера, рассмотрим естественное отображение из $\mathbb{R}$ с дискретной топологией в $\mathbb{R}$ с обычной топологией. Слои этого отображения точки, образ связен, но $\mathbb{R}$ с дискретной топологией, очевидно, несвязно.

Замечание 12.16. Компоненты связности топологического пространства замкнуты, потому что замыкание связного множества связно.

Определение 12.17. Топологическое пространство называется **вполне несвязным**, если все его связные подмножества – точки.

Утверждение 12.18: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, у которого есть база топологии, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Тогда M вполне несвязно.

Доказательство: Пусть $m \in M$. В силу хаусдорфовости, у каждой точки $m_1 \neq m$ есть открытозамкнутая окрестность, не содержащая m. Поэтому $\{m\}$ – пересечение открыто-замкнутых множеств, $\{m\} = \bigcap U_\alpha$. Любое связное подмножество $Z \subset M$, содержащее m, содержится в каждом из этих открыто-замкнутых множеств целиком (докажите). Поэтому $Z \subset \bigcap U_\alpha = \{m\}$. ■

Следствие 12.19: Пространство $\mathbb{Z}_p$ p-адических чисел вполне несвязно. Действительно, каждый открытый шар в $\mathbb{Z}_p$ замкнут (докажите это).

Задача 12.20. Все ли открытые подмножества $\mathbb{Z}_p$ открытозамкнуты?

Замечание 12.21. Пусть M – топологическое пространство, а $f : M \longrightarrow X$ – произвольное отображение. Рассмотрим на X такую топологию: $U \subset X$ открыто, если $f^{-1}(U)$ открыто. Это сильнейшая топология на X такая, что f непрерывно.

Определение 12.22. Пусть M – топологическое пространство, а $\underline{M}$ – множество компонент связности M. Рассмотрим на $\underline{M}$ сильнейшую топологию, в которой естественная проекция $\pi : M \longrightarrow \underline{M}$ непрерывна. Тогда $\underline{M}$ называется **пространством компонент связности** M.

Замечание 12.23. Любое открыто-замкнутое подмножество $U \subset M$, которое пересекается с какой-то компонентой связности, содержит ее целиком. Поэтому все открыто-замкнутые подмножества M имеют вид $\pi^{-1}(V)$, где V – открыто-замкнутое подмножество в $\underline{M}$. Следпвательно, для каждого несвязного подмножества M, $\pi(M)$ тоже несвязно. А поскольку связные подмножества M переходят в точку, $\underline{M}$ вполне несвязно.

Мы доказали такое утверждение

Утверждение 12.24: Пусть M – топологическое пространство. Тогда M допускает непрерывное отображение $\pi : M \longrightarrow \underline{M}$ во вполне несвязное топологическое пространство $\underline{M}$, и слои π связны. ■

12.3. Линейная связность

Определение 12.25. Пространство M называется **линейно связным**, если для любых двух точек $x, y \in M$ найдется непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ такое, что x и y лежат в образе γ.

Замечание 12.26. Из линейной связности следует связность. Действительно, отрезок $[0,1]$ связен, образ связного множества связен, объединение пересекающихся связных множеств связно, и поэтому линейно связное пространство состоит из одной-единственной компоненты связности.

Рассмотрим график Γ_f отображения $f(x) = \sin(1/x)$,

$$f :]0,1] \longrightarrow [-1,1].$$

Это множество незамкнуто; легко видеть, что его замыканием $\bar{\Gamma}_f$ будет объединение Γ_f и отрезка $\{0\} \times [-1,1]$.

Пространство Γ_f гомеоморфно полуинтервалу $]0,1]$ (гомеоморфизм задается проекцией на ось абсцисс). Поэтому $\bar{\Gamma}_f$ тоже связно, как замыкание связного множества.

Утверждение 12.27: Построенное таким образом множество $\bar{\Gamma}_f$ не является линейно связным.

Доказательство: Пусть $\gamma : [0,1] \longrightarrow \bar{\Gamma}_f$ – отображение из отрезка, образ которого не лежит целиком в $\{0\} \times [-1,1]$. Докажем, что образ

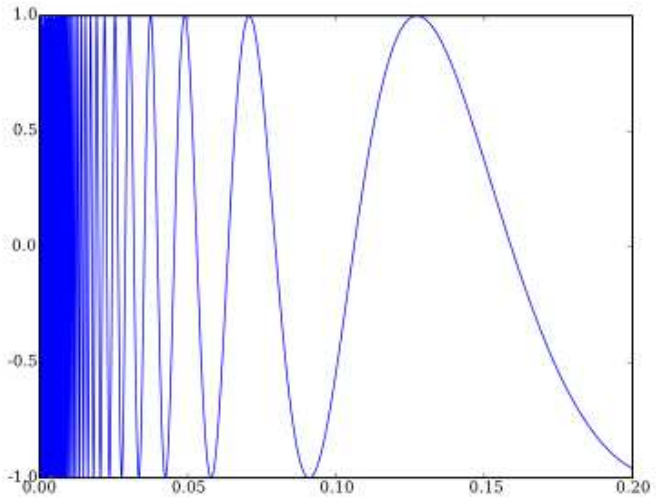


График $f(x) = \sin(1/x)$

γ не пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$. Пусть $U \subset [0, 1]$ – открытое множество, полученное как $\gamma^{-1}(\Gamma_f)$, U_0 – какая-то компонента связности U, $\bar{U}_0$ – ее замыкание, а $Z = \gamma(\bar{U}_0)$. Предположим, что Z пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$ (в противном случае $\gamma([0, 1])$ лежит в Γ_f, и мы все доказали).

Шаг 1: Поскольку $\bar{U}_0$ компактно, Z тоже компактно, а следовательно замкнуто.

Шаг 2: Поскольку замыкание $\gamma(U_0)$ пересекает $\{0\} \times [-1, 1]$, оно не содержится в Γ_f. Следовательно, $\gamma(U_0)$ содержит подмножество вида

$$\{(\alpha, \sin(1/\alpha)) \mid 0 < \alpha < c\},$$

и его замыкание Z содержит отрезок $\{0\} \times [-1, 1]$ целиком.

Шаг 3: Поскольку $Z \backslash \gamma(U_0)$ содержит $\{0\} \times [-1, 1]$, образ $\gamma(\bar{U}_0 \backslash U_0)$ содержит отрезок $\{0\} \times [-1, 1]$. Но это невозможно, потому что множество $\bar{U}_0 \backslash U_0$ конечно. ■