Математический колледж НМУ

Экзамен по топологии
2 курс, IV семестр, 12 мая 2008 г.

1. Вычислите гомотопические группы пространства касательных векторов единичной длины к ориентируемой поверхности рода $g \geqslant 1$ (считая известным, что универсальная накрывающая поверхности изоморфна двумерной плоскости).

2. Вычислите гомологии пространства петель ΩS^3 а) с рациональными коэффициентами; б) с целыми коэффициентами; в) опишите умножение в целочисленных когомологиях.

3. Пусть $X = S^2 \vee S^2$ — букет двух (двумерных) сфер. а) Вычислите гомотопическую группу $\pi_3(X)$; б) опишите инварианты $\pi_3(X) \to \mathbb{Z}$, различающие элементы этой группы; в) вычислите ранги четвертой и пятой гомотопической группы этого пространства, то есть размерности пространств $\pi_4(X) \otimes \mathbb{Q}$ и $\pi_5(X) \otimes \mathbb{Q}$.

4. а) Выразите $\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^3$ и $\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2$ через допустимые последовательности квадратов Стинрода и докажите полученные равенства. б) Выразите первые 4 однородные компоненты операции Sq^{-1}, обратной к полному квадрату Стинрода, через допустимые последовательности квадратов Стинрода.

Решения.

1. Для изучаемого пространства M имеется расслоение $p : M \to C$, у которого и база C (поверхность рода g) и слой (окружность) имеют тривиальные высшие гомотопические группы. Поэтому из гомотопической длинной точной последовательности находим $\pi_k(M) = 0$ при $k > 0$, а группа $\pi_1(M)$ определяется короткой точной последовательностью

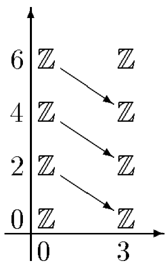
$$0 \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(M) \to \pi_1(C) \to 0.$$

При $g > 1$ эта последовательность вовсе не является расщепляющейся! Выберем $2g$ непересекающихся кривых с началом и концом в одной и той же точке, так, чтобы дополнение было гомеоморфно диску (иными словами, представим поверхность в виде $4g$-угольника, склеенного подходящим образом вдоль его сторон). Тривиализуем расслоение p над границей $4g$-угольника при помощи векторного поля на поверхности с единственной особой точкой (индекса $2-2g$) внутри $4g$-угольника. Обозначим через a_i, b_i поднятия кривых разреза на M при помощи выбранной тривиализации и через u слой расслоения. Тогда в группе $\pi_1(M)$ выполняются соотношения

$$[a_i, u] = 1, \quad [b_i, u] = 1, \quad [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = u^{2-2g}.$$

Последнее соотношение выражает (двумя способами) гомотопический класс петли, полученной обходом вдоль границы $4g$-угольника. Эти соотношения и служат определяющими для группы $\pi_1(M)$.

2. Имеется расслоение с базой S^3, слоем ΩS^3 и стягиваемым тотальным пространством. Начальный член когомологической спектральной последовательности, изображенный на рисунке, имеет два нетривиальных столбца. Дифференциалы $\delta_3 : E_3^{0,2k} \to E_3^{2k-2,3}$ являются изоморфизмами (иначе предельный член не был бы тривиальным). Отсюда по индукции заключаем, что $H^{2k}(\Omega S^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, нечетномерные группы когомологий тривиальны. Аналогично (или из формулы универсальных коэффициентов) находим $H_{2k}(\Omega S^3) = \mathbb{Z}$, и нечетномерные группы гомологий тривиальны.



Вычислим умножение в когомологиях. Пусть u_k — образующая группы $H^{2k}(\Omega S^3, \mathbb{Z})$. Тогда $\delta_3 u_k = u_{k-1}v$, где $v = \delta_3 u_1$. С другой стороны, $u_1^k = a_k u_k$ для некоторого целого a_k. Поэтому из мультипликативности спектральной последовательности находим

$$a_k \delta_3(u_k) = \delta_3(u_1^k) = k\, u_1^{k-1} v = k\, a_{k-1} u_{k-1} v.$$

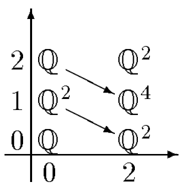
Отсюда по индукции получаем $a_k = k\, a_{k-1} = \dots = k!$. Таким образом,

$$u_i u_j = \frac{u_1^i}{i!}\frac{u_1^j}{j!} = C_{i+j}^i u_{i+j}.$$

3. Обозначим $n_k = \mathrm{rk}\,\pi_k(X)$. Действуя методом Серра, определим пространства $X|_k$, такие, что $\mathrm{rk}\,\pi_i(X|_k) = n_i$ при $i \geqslant k$ и $\pi_i(X|_k)$ являются группами кручения при $i < k$. Тогда по теореме Гуревича $n_k = \dim H_k(X|_k, \mathbb{Q}) = \dim H^k(X|_k, \mathbb{Q})$.

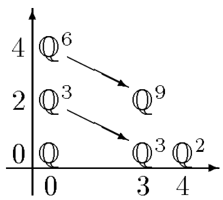
Пространство $X|_{k+1}$ находится по индукции как тотальное пространство расслоения $X|_{k+1} \to X|_k$ со слоем $K(\mathbb{Z}^{n_k}, k-1)$. Когомологии этого пространства находятся при помощи спектральной последовательности. Начальным шагом индукции служит пространство $X = X|_2$; $n_2 = 2$.

Шаг 1. Спектральная последовательность расслоения $X|_3 \xrightarrow{K(\mathbb{Z}^2,1)} X$. Когомологии слоя $K(\mathbb{Z}^2, 1) = S^1 \times S^1$ изоморфны $\Lambda(x_1, x_2)$, $\deg x_i = 1$. Начальный член и нетривиальные дифференциалы изображены на рисунке. Дифференциал $\delta_2 : E_2^{0,2} \to E_2^{2,1}$ инъективен, поскольку $\delta_2(x_1 x_2) = y_1 x_2 - x_1 y_2 \neq 0$, где $y_i = \delta_2(x_i)$.



Таким образом, размерности пространств когомологий $H^k(X|_3, \mathbb{Q})$ равны $(1, 0, 0, 3, 2, 0, \dots)$. В частности, $n_3 = 3$.

Шаг 2. Спектральная последовательность расслоения $X|_4 \xrightarrow{K(\mathbb{Z}^3,2)} X|_3$. Когомологии слоя $K(\mathbb{Z}^3, 2) = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ изоморфны $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$, $\deg x_i = 2$. Начальный член и нетривиальные дифференциалы изображены на рисунке. Шестимерное пространство $E_2^{0,4} = H^4(K(\mathbb{Z}^3, 2), \mathbb{Q})$ порождено квадратичными мономами от переменных x_i. Дифференциал $\delta_3 : E_3^{0,4} \to E_3^{3,2}$ инъективен, поскольку шесть векторов $\delta_3(x_1^2) = 2x_1 y_1, \dots, \delta_3(x_2 x_3) = y_2 x_3 + x_2 y_3$ линейно независимы, где $y_i = \delta_3(x_i)$.



Таким образом, размерности пространств когомологий $H^k(X|_4, \mathbb{Q})$ равны $(1, 0, 0, 0, 2, 3, \dots)$. В частности, $n_4 = 2$.

Шаг 3. Спектральная последовательность расслоения $X|_5 \overset{K(\mathbb{Z}^2,3)}{\longrightarrow} X|_4$. Поскольку рациональные когомологии пространства $K(\mathbb{Z},3)$ тривиальны в размерностях 4 и 5, переход к пространству расслоения не меняет когомологий в размерности 5, и мы получаем

$$n_5 = \dim H_5(X|_5, \mathbb{Q}) = \dim H_5(X|_4, \mathbb{Q}) = 3.$$

Итак, $\mathrm{rk}\pi_3(X) = 3$, $\mathrm{rk}\pi_4(X) = 2$, $\mathrm{rk}\pi_5(X) = 3$. Аналогичные вычисления над $\mathbb{Z}$ показывают, что в группе $H^4(X|_3, \mathbb{Z})$ отсутствует кручение, поэтому и в группе $H_3(X|_3)$ отсутствует кручение, поэтому $\pi_3(X) = \mathbb{Z}^3$. Три инварианта, различающие элементы группы $\pi_3(X) = \mathbb{Z}^3$, следующие. Два из них — это инварианты Хопфа отображения $S^3 \to S^2$, полученного из данного отображения $S^3 \to X$ стягиванием одной из двух сфер букета. Напомним, что инвариант Хопфа — это коэффициент зацепления двух общих слоев (гладкой аппроксимации) отображения $S^3 \to S^2$. В качестве третьего инварианта $\pi_3(X) \to \mathbb{Z}$ можно взять коэффициент зацепления двух кривых, являющихся прообразами двух точек в X, одна из которых взята на одной, а другая — на другой сфере букета (предполагая, что в окрестности прообраза этих точек отображение гладкое).

Замечание. Ответ на эту задачу, сформулированный в книге Фоменко и Фукса (стр. 229, упражнение 5), ошибочный.

4а. В градуировке, не превышающей 4, соотношения между квадратами Стинрода следующие:

$$\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^1 = 0, \quad \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^2 = \mathrm{Sq}^3, \quad \mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^3 = 0, \quad \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 = \mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1.$$

Эти равенства достаточно доказывать в предположении, что класс когомологий, к которому применяется операция, является произведением xu, где $\deg x = 1$. В частности, для последних двух равенств получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^3 xu &= \mathrm{Sq}^1(x\mathrm{Sq}^3 u + x^2\mathrm{Sq}^2 u) = x\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^3 u + x^2\mathrm{Sq}^3 u + x^2\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^2 u,\\
\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 xu &= \mathrm{Sq}^2(x\mathrm{Sq}^2 u + x^2\mathrm{Sq}^1 u) = x\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^2 u + x^2\mathrm{Sq}^1\mathrm{Sq}^2 u + x^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1 u + x^4\mathrm{Sq}^1 u,\\
\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1 xu &= \mathrm{Sq}^3(x\mathrm{Sq}^1 u + x^2 u) = x\mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1 u + x^2\mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1 u + x^2\mathrm{Sq}^3 u + x^4\mathrm{Sq}^1 u.
\end{aligned}$$

По индукции (то есть предполагая доказанными эти равенства в применении к классу u) мы устанавливаем требуемые равенства.

4б. Положим $\mathrm{Sq}^{-1} = X = 1 + X^1 + X^2 + \ldots$. Тогда $\sum_{i+j=k} X^i\mathrm{Sq}^j = 0$. Поэтому последовательно находим

$$\begin{aligned}
X^1 &= \mathrm{Sq}^1,\\
X^2 &= \mathrm{Sq}^2 + X^1\mathrm{Sq}^1 = \mathrm{Sq}^2,\\
X^3 &= \mathrm{Sq}^3 + X^1\mathrm{Sq}^2 + X^2\mathrm{Sq}^1 = \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1,\\
X^4 &= \mathrm{Sq}^4 + X^1\mathrm{Sq}^3 + X^2\mathrm{Sq}^2 + X^3\mathrm{Sq}^1 = \mathrm{Sq}^4 + \mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Sq}^{-1} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \mathrm{Sq}^2\mathrm{Sq}^1 + (\mathrm{Sq}^4 + \mathrm{Sq}^3\mathrm{Sq}^1) + \ldots.$$