Малые степени

Задача 1. Пусть P — неразложимый многочлен второй степени над полем K характеристики 0, $L = K\{P\}$ — его поле разложения.

a) Докажите, что группа Галуа уравнения $\mathrm{Gal}(L, K)$ равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Пусть x_1, x_2 — корни P. Как действует нетривиальный элемент $\mathrm{Gal}(L, K)$ на x_1, x_2, $x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$?

Задача 2. Пусть P — неразложимый многочлен третьей степени над полем K характеристики 0, $L = K\{P\}$ — его поле разложения. Для удобства вычислений рекомендуется привести P к виду $x^3 + px + q$.

a) Какой подгруппой S_3 может быть $\mathrm{Gal}(L, K)$?

b) Пусть x_1, x_2, x_3 — корни P. Рассмотрим

$$\delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) \in L.$$

Докажите, что чётные перестановки из $\mathrm{Gal}(L, K)$ сохраняют δ. Выразите δ^2 через коэффициенты P.

c) Пусть $\rho = \frac{\sqrt{3}i-1}{2}$ — кубический корень из единицы. Предположим, что K содержит ρ (при необходимости добавив ρ к K). Как действуют чётные перестановки на элементы

$$x_\rho = x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3 \in L, \qquad x_{\rho^{-1}} = x_1 + \rho^{-1} x_2 + \rho^{-2} x_3 \in L?$$

d) Выразите x_ρ^3 и $x_{\rho^{-1}}^3$ через δ и коэффициенты P.

e) Выразите x_1, x_2, x_3 через x_ρ и $x_{\rho^{-1}}$. Запишите формулу для решения кубического уравнения.

Задача 3. Пусть P — неразложимый многочлен четвёртой степени над полем K характеристики 0, $L = K\{P\}$ — его поле разложения. Для удобства вычислений можно сделать линейную замену переменной.

a^*) Какой подгруппой S_4 может быть $\mathrm{Gal}(L, K)$? Приведите примеры.

b) Пусть K_4 — подгруппа S_4, составленная перестановками из двух циклов длины 2. Докажите, что K_4 — нормальная подгруппа, и что фактор S_4/K_4 изоморфен S_3.

c) Пусть

$$y_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \quad y_2 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2), \quad y_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3).$$

Как действуют перестановки корней на эти элементы?

d) Пусть $M = K(y_1, y_2, y_3) \subset L$. Докажите, что M — расширение Галуа K и найдите $\mathrm{Gal}(L, M)$ и $\mathrm{Gal}(M, K)$.

e) Используя $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ и коэффициенты P, составьте кубическое уравнение, корнями которого будут y_1, y_2 и y_3.

f) Запишите линейные комбинации $x_1, \ldots, x_4$ в L, на которые перестановки из K_4 действуют умножением на ± 1 (их должно быть четыре). Выразите квадраты этих выражений через коэффициенты P и y_i.

g) Сформулируйте, как решать уравнения четвёртой степени в радикалах.

продолжение на обороте

Задача 4. Пусть P — многочлен степени n над полем K характеристики 0, $L = K\{P\}$ — его поле разложения. Предположим, что P не имеет кратных корней, пусть $x_1, \ldots, x_n \in L$ — его корни. Определим $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

a) Докажите, что $\delta^2 \in K$.

b) Пусть $F = K(\delta) \subset L$. Докажите, что F — расширение Галуа K. Найдите $\mathrm{Gal}(F, K)$.

c) Докажите, что $\mathrm{Gal}(L, F) \subset \mathrm{Gal}(L, K)$ состоит из элементов, осуществляющих чётные перестановки корней P.

d^*) Докажите, что

$$\delta^2 = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a^{n-1}} \mathrm{Res}(P, P'),$$

где a — старший коэффициент P.

Задача 5*. Насколько можно ослабить требование нулевой характеристики в задачах этого листка?