Симметрическая группа

Задача 1. a) Докажите, что всякий класс сопряженности S_n определяются длинами циклов элементов (цикл — орбита естественного действия перестановки на n-элементом множестве).

b) Опишите классы сопряжённости подгруппы $A_n \subset S_n$ чётных перестановок.

Задача 2. a) Докажите, что $[S_n, S_n] = A_n$.

b) Докажите, что $[A_n, A_n] = A_n$ при $n \geqslant 5$.

Задача 3*. Докажите, что A_n — проста при $n \geqslant 5$.

Задача 4. a) Пусть p — простое целое число. Докажите, что всякая подгруппа S_p, содержащая транспозицию и транзитивно действующая на p-элементном множестве, совпадает со всей S_p.

b) Выведите отсюда, что уравнение $x^5 - 10x + 5 = 0$ неразрешимо в радикалах.

Задача 5. Докажите, что следующие представления неприводимы:

a) A_4 вращениями тетраэдра,

b) S_4 самосовмещениями тетраэдра,

c) S_4 вращениями куба,

d) A_5 вращениями икосаэдра.

Задача 6. Разложите на неприводимые представления

a) S_n самосовмещениями $(n-1)$-мерного симплекса,

b) S_n перестановками координатных векторов n-мерного пространства,

c) эти же представления в ограничении на A_n,

d^*) тензорные квадраты этих представлений S_n.