Соответствие Маккея

Задача 1. Докажите, что $SO_2 \cong U_1$.

Задача 2. Пусть $\|x\| = x\overline{x}$, где $x \in \mathbb{H}$ — кватернион.

a) Постройте скалярное произведение на $\mathbb{H}$ как на четырёхмерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$, такое что для всякого $x \in \mathbb{H}$ выполнено $(x, x) = \|x\|$.

b) Постройте эрмитову форму на $\mathbb{H}$ как на двумерном векторном пространстве над $\mathbb{C}$, такую что для всякого $x \in \mathbb{H}$ выполнено $(x, x) = \|x\|$.

c) Докажите, что всякое специальное унитарное преобразование этого двумерного пространства задаётся умножением на элемент $\mathbb{H}$, по модулю равный единице.

Задача 3. Докажите, что $SO_3 \cong SU_2/\pm 1$.

Подсказка: Рассмотрите действие $SU_2 \subset \mathbb{H}$ сопряжениями на чисто мнимые кватернионы.

Задача 4. Докажите, что $SO_4 \cong (SU_2 \times SU_2) / \pm (1, 1)$.

Подсказка: Рассмотрите действие $SU_2 \times SU_2 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ умножениями слева и справа на все кватернионы.

Задача 5.** Докажите, что всякая конечная подгруппа SO_3 попадает в следующий список: циклическая $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, группа диэдра D_n, группа тетраэдра A_4, группа куба S_4, группа икосаэдра A_5.

Задача 6. Как устроены прообразы следующих групп в SU_2? Выделится ли в них ± 1 декартовым сомножителем? Задайте их образующими и соотношениями.

a) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

b) $G = D_n$,

c^*) $G = A_4$,

d^*) $G = S_4$,

e^{**}) $G = A_5$.

Задача 7. Пусть G — конечная подгруппа SU_2, V — естественное двумерное комплексное представление этой группы унитарными операторами.

a) Докажите, что $V^* \cong V$.

b) Пусть U_1 и U_2 — неприводимые комплексные представления G. Докажите, что $U_1 \otimes V$ содержит U_2 в разложении на неприводимые тогда и только тогда, когда $U_2 \otimes V$ содержит U_1 в разложении на неприводимые.

Задача 8. Для следующих подгрупп $G \subset SU_2$ нарисуйте следующий граф Γ_G. Вершины Γ_G — неприводимые представления с точностью до изоморфизма. Вершины, соответствующие представлениям U_1 и U_2 соединены ребром, если $U_1 \otimes V$ содержит U_2, где V — естественное двумерное представление.

a) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

b) $G = D_n$,

c^*) $G = A_4$,

d^*) $G = S_4$,

e^{**}) $G = A_5$.

Сохраните ответы до курса групп и алгебр Ли.