Представления симметрических групп

Обозначим через $Z(n)$ центр алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Зафиксируем естественные вложения групп $S_1 \hookrightarrow S_2 \hookrightarrow S_3 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow S_n$. Рассмотрим подалгебру $GZ(n) \subset \mathbb{C}[S_n]$, порожденную подалгебрами $Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)$.

Задача 1. a) Докажите, что подалгебра $GZ(n)$ коммутативна.

b) Докажите, что следующие элементы принадлежат $GZ(n)$:

$$X_i = [(1,i)] + [(2,i)] + \ldots + [(i-1,i)], \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Подсказка: Заметьте, что $X_2 + X_3 + \ldots + X_n \in Z(n)$.

c) Вычислите X_i^k.

Для любого представления V группы S_n рассмотрим его ограничение $V|_{S_{n-1}}$ на подгруппу S_{n-1}. Также нам потребуется централизатор подалгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$:

$$Z(n-1,1) = \{x \in \mathbb{C}[S_n] \mid xy = yx \ \forall y \in \mathbb{C}[S_{n-1}]\}.$$

Задача 2. a) Докажите, что следующий оператор является проектором $\mathbb{C}[S_n] \to Z(n-1,1)$:

$$\pi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} [\sigma] x [\sigma^{-1}].$$

b) Докажите, что подалгебра $Z(n-1,1)$ порождена элементами $\pi([c])$ для циклов $c \in S_n$.

c) Докажите, что подалгебра $Z(n-1,1)$ порождена $Z(n-1)$ и X_n.

d) Докажите, что подалгебра $Z(n-1,1)$ коммутативна.

e) Пусть V — неприводимое представление группы S_n и U — неприводимое представление группы S_{n-1}. Докажите, что кратность вхождения U в $V|_{S_{n-1}}$ не больше 1.

Подсказка: Постройте в противном случае некоммутирующие элементы $Z(n-1,1)$.

Задача 3. Пусть λ — диаграмма Юнга из n клеток, μ — диаграмма Юнга из $n-1$ клетки. Докажите, что представление $V^\lambda\big|_{S_{n-1}}$ содержит V^μ, если и только если μ получается из λ удалением одной клетки.

Подсказка: Вычислите композицию проекторов Юнга.

По индукции мы получаем разложение V^λ на неприводимые представления S_1 (т.е. одномерные пространства) $V^\lambda = \oplus V^T$, которые нумеруются всевозможными цепочками $T = \lambda_1 \subset \lambda_2 \subset \ldots \subset \lambda_n = \lambda$, где λ_i — диаграммы Юнга из i клеток.

Выбирая в каждом одномерном пространстве V^T по вектору v^T, получаем базис пространства V^λ. Этот базис называется *базисом Гельфанда-Цетлина* (GZ-базисом).

Задача 4. Докажите, что операторы алгебры $GZ(n)$ в GZ-базисе диагональны.

Задача 5. Докажите, что размерность V^λ равна количеству *стандартных таблиц* формы λ — количеству заполнений λ набором чисел $1, 2, \ldots, n$, возрастающими по горизонтали и вертикали.

Задача 6*. Докажите *формулу крюков*:

$$\dim V^\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}},$$

где длина крюка h_{ij} — количество клеток диаграммы λ вида (i,k), $k \geqslant j$, и (l,j), $l \geqslant i$.