Алгебры Клиффорда

Определение 1 Пусть V — пространство над полем K, $\mathrm{char} K \neq 2$, с квадратичной формой Q. *Алгеброй Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V)$ называется алгебра, порожденная элементами V, с соотношениями $v^2 = Q(v)$, $v \in V$.

Задача 1. a) Докажите, что для пространства с нулевой формой $\mathrm{Cl}(V)$ изоморфна алгебре косых многочленов $\Lambda(V)$.

b) Докажите, что для произвольной формы $\mathrm{Cl}(V)$ как векторное пространство изоморфно $\Lambda(V)$.

Определение 2 Алгебру Клиффорда для n-мерного комплексного пространства с невырожденной формой будем обозначать Cl^n. Алгебру Клиффорда для $(p+q)$-мерного вещественного векторного пространства с формой сигнатуры (q,p) будем обозначать $\mathrm{Cl}^{p,q}$.

Задача 2. a) Докажите, что $\mathrm{Cl}^{1,0} \cong \mathbb{C}$, $\mathrm{Cl}^{2,0} \cong \mathbb{H}$.

b) Найдите $\mathrm{Cl}^{3,0}$.

Задача 3. Докажите, что

a) $\mathrm{Cl}^1 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathrm{Cl}^2 \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;

b) $\mathrm{Cl}^{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}^{0,2} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Задача 4. Определим квадратичную форму на $V \oplus V^*$ так: $(v+\phi, v+\phi) = 2\phi(v)$ для $v \in V$, $\phi \in V^*$. Докажите, что $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*) \cong \mathrm{Mat}(\Lambda(V))$.

Подсказка: зафиксируем базис; какие элементы соответствуют матричным единицам?

Задача 5. a) Докажите, что $\mathrm{Cl}^{2n} \cong \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$.

b) Докажите, что $\mathrm{Cl}^{2n+1} \cong \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$.

Подсказка: найдите нетривиальный элемент центра Cl^{2n+1}.

Определение 3 *Супералгебра ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная алгебра)* — алгебра A, изоморфная как векторное пространство $A_0 \oplus A_1$, причём $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j \bmod 2}$. Элементы A_0 называются *чётными*, элементы A_1 называются *нечётными*, чётные и нечётные элементы называются *однородными*. Для каждого однородного элемента $x \in A_i$ определяется его *чётность* $d(x) = i$. Отображение алгебр, перводящее чётные/нечётные элементы в чётные/нечётные, называется *отображением супералгебр.*

Задача 6. a) Постройте градуировку на $\mathrm{Cl}(V)$ так, чтобы единица была чётной, а все образующие $v \in V$ — нечётными. Какие элементы при этом будут однородными?

b) Как устроена градуировка для матричных алгебр в задачах 3, 4 и 5?

Определение 4 Пусть A и B — супералгебры. Их *(градуированным или супер-) тензорным произведением* называется векторное пространство $A \otimes B$ с умножением, определённым на однородных элементах так: $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{d(a')d(b)}(aa') \otimes (bb')$.

Задача 7. Постройте изоморфизмы супералгебр:

a) $A \otimes B \to B \otimes A$,

b) $A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$.

Задача 8. Постройте изоморфизм супералгебр $\mathrm{Cl}(U \oplus V) \cong \mathrm{Cl}(U) \otimes \mathrm{Cl}(V)$.

Задача 9. a) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. При каких условиях умножение образующих на $\varepsilon = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$ задает изоморфизм $\mathrm{Cl}(V,Q)$ и $\mathrm{Cl}(V,-Q)$? Запишите этот изоморфизм явно.

b) Докажите, что $\mathrm{Cl}^{8,0} \cong \mathrm{Cl}^{4,4} \cong \mathrm{Cl}^{0,8}$. Будет ли это изомофизмом супералгебр?

Определение 5 Будем говорить, что алгебры A и B *Морита-эквивалентны*, если найдётся алгебра D, такая что $A \cong \mathrm{Mat}_n(D)$, $B \cong \mathrm{Mat}_m(D)$.

Задача 10. *(Алгебраическая периодичность Ботта)* Докажите, что если выполнено $p - q \equiv p' - q' \pmod 8$, то $\mathrm{Cl}^{p,q}$ и $\mathrm{Cl}^{p',q'}$ Морита-эквивалентны.

Задача 11*. Найдите $\mathrm{Cl}^{p,q}$ для всех p и q.