Экзамен

Задача 1. Вычислите $\sum\limits_{x\in\mathbb{F}_q} x^2$.

Задача 2. Пусть $P = (x^2-1)^3 - 1$.

a) Вычислите степень поля разложения $[\mathbb{Q}\{P\} : \mathbb{Q}]$.

b) Найдите группу Галуа поля разложения $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}\{P\}, \mathbb{Q})$.

c) Можно ли выразить все корни P с помощью арифметических действий из рациональных чисел и корней из единицы?

Задача 3. Найдите все целые элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-1})$.

Задача 4. Пусть группа G порождена элементами x и y с соотношениями

$$x^4 = y^5 = 1, \qquad xy = y^2x.$$

a) Найдите количество элементов G.

b) Найдите все одномерные комплексные представления G.

c) Вычислите размерности неприводимых комплексных представлений G.

d) Постройте все неприводимые комплексные представления G (запишите действие образующих матрицами).

e) Вычислите размерности неприводимых вещественных представлений G.

Задача 5. Существуют ли центральные простые алгебры над $\mathbb{Q}$ размерности 3?