1. Топология пространства $\mathbb{R}^n$. Непрерывные отображения

Задача 1. Докажите, что любое открытое подмножество $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов.

Задача 2. Может ли подмножество $\mathbb{R}^n$ быть открытым и замкнутым одновременно?

Задача 3. Докажите, что пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами. Верно ли второе утверждение для бесконечного числа замкнутых множеств?

Задача 4. Докажите, что любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ является пересечением последовательности открытых множеств, а любое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ — объединением последовательности замкнутых множеств.

Определение. Пусть E – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\|\cdot\|\colon E \to [0,+\infty)$ называется *нормой* на E, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in E$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in E$;
3) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

Если $\|\cdot\|$ — норма на E, то на E можно определить расстояние (метрику) $d(x,y) = \|x-y\|$, которое, в свою очередь, порождает топологию на E по той же схеме, что и евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ (см. лекцию).

Задача 5. Наряду с евклидовой нормой на $\mathbb{R}^n$, которая определяется формулой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$ для $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, введем еще две нормы равенствами $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ и $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.
1) Покажите, что $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.
2) Покажите, что для каждого n существуют такие $C, D > 0$, что $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ и $\|x\|_2 \leqslant D\|x\|_\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.
3) Укажите наименьшие C, D с этим свойством.

Определение. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — две нормы на векторном пространстве E. Они называются *эквивалентными*, если существуют такие $a, b > 0$, что $a\|x\|' \leqslant \|x\|'' \leqslant b\|x\|'$ для всех $x \in E$.

Из предыдущей задачи следует, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Задача 6. Докажите, что нормы на векторном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают одну и ту же топологию.

Задача 7. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность точек $\mathbb{R}^n$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$;
2) $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$;
3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x^i$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
4) для любого открытого множества $U \ni x$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_k \in U$ для всех $k > N$.

Задача 8. **1)** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ для некоторой последовательности $\{x_k\}$ из A.
2) Докажите, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к x, найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_k \in U$ для всех $k > N$.

Задача 9. Докажите, что из любого открытого покрытия любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать не более чем счетное подпокрытие.

Задача 10. Докажите, что подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, имеющую предел в K.

Задача 11. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда оно переводит любую последовательность в E, сходящуюся к x, в последовательность, сходящуюся к $f(x)$.

Задача 12. Докажите, что отображение $f = (f^1, \ldots, f^m)\colon E \to \mathbb{R}^m$ непрерывно тогда и только тогда, когда все функции $f^1, \ldots, f^m$ непрерывны.

Задача 13. Постройте такую функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что $f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} f(t,kt) = \lim\limits_{t\to 0} f(kt,t) = 0$ для любого $k \in \mathbb{R}$, но f разрывна в точке $(0,0)$.

Задача 14. Докажите, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда она переводит каждый отрезок в отрезок и прообраз каждой точки замкнут.

Задача 15. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное инъективное отображение. Докажите, что отображение $f^{-1}\colon f(K) \to K$ непрерывно.

Задача 16. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in A$ найдется такое непрерывное отображение (путь) $\gamma\colon [0,1] \to A$, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Подмножество $U \subset A$ называется *относительно открытым* (или *открытым в* A), если $U = A \cap V$ для некоторого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$. Множество A называется *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух своих непустых относительно открытых подмножеств.

Задача 17. Докажите, что отрезок $[a,b]$ связен и линейно связен.

Задача 18. Докажите, что линейно связное множество связно.

Задача 19. Пусть Γ есть график функции $y = \sin(1/x)$, где $0 < x \leqslant 1$. Рассмотрим множество, равное объединению Γ с отрезком $[-1,1]$ оси Oy. Докажите, что это множество связно, но не линейно связно.

Задача 20. Опишите все связные подмножества $\mathbb{R}$.

Задача 21. Докажите, что непрерывный образ связного (соответственно, линейно связного) подмножества $\mathbb{R}^n$ связен (соответственно, линейно связен).

Задача 22. Докажите что для открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ связность эквивалентна линейной связности.

Определение. Открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$ называется *областью.*

Задача 23. Придумайте две ограниченные области U и V в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям $U \cap V = \varnothing$ и $\partial U = \partial V$.