2. Дифференциал

При решении сегодняшних задач полезно помнить, что есть объекты двух видов: это *точки* пространства $\mathbb{R}^n$ и *векторы*, «отложенные» от этих точек. Векторы, отложенные от одной точки, можно складывать друг с другом «по правилу параллелограмма» и умножать на числа. (А вот векторы, отложенные от разных точек, складывать нельзя.) Строго говоря, это означает следующее.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$. Обозначим через $T_{x_0}U$ множество всех пар (x_0, ξ), где $\xi \in \mathbb{R}^n$. Оно называется *касательным пространством* к U в точке x_0. Элементы $T_{x_0}U$ следует представлять себе как «векторы, отложенные от x_0». Имеется биекция $T_{x_0}U \to \mathbb{R}^n$, $(x_0, \xi) \mapsto \xi$, которая позволяет перенести структуру векторного пространства из $\mathbb{R}^n$ на $T_{x_0}U$. (Таким образом, мы получаем бесконечное семейство экземпляров векторного пространства $\mathbb{R}^n$, «занумерованных» точками из U). В дальнейшем вместо $(x_0, \xi) \in T_{x_0}U$ мы будем писать просто $\xi \in T_{x_0}U$.

Пусть дана функция $f\colon U \to \mathbb{R}$. Для $x_0 \in U$ и $\eta \in T_{x_0}U$ обозначим через $x_0 + \eta$ точку из $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_0^1 + \eta^1, \ldots, x_0^n + \xi^n$.

Определение. *Производной f в точке $x_0 \in U$ по направлению $\xi \in T_{x_0}U$* называется производная функции $\varphi(t) = f(x_0 + t\xi)$ при $t = 0$. Она обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x_0)$.

Задача 1. Как связаны $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial (c\xi)}(x_0)$, где $c \in \mathbb{R}$ — фиксированная константа?

Задача 2. Является ли частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ производной вдоль какого-нибудь вектора?

Задача 3. Докажите, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

Задача 4. Придумайте функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную вдоль любого вектора, но **1)** разрывную в x_0; **2)** непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0; **3)** непрерывную в $\mathbb{R}^2$ и дифференцируемую в $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$, но не дифференцируемую в x_0.

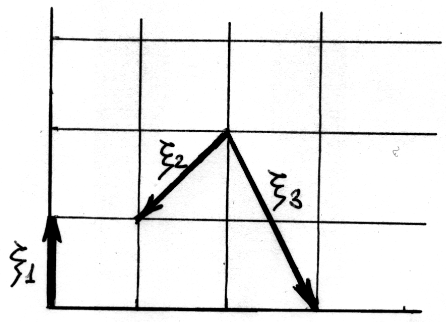
Задача 5. Докажите, что отображение $f = (f^1, \ldots, f^m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$ тогда и только тогда, когда все функции $f^i\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ дифференцируемы в этой точке.

Замечание. Если функция f дифференцируема в x_0, то ее дифференциал $df(x_0)$ — это линейный функционал на пространстве $T_{x_0}U$ (определение см. в лекции).

Задача 6. Докажите, что если функция f дифференцируема в x_0, то она имеет производную вдоль любого вектора $\xi \in T_{x_0}U$, и $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) = df(x_0)\xi$.

Начиная со следующей задачи, $x^1, \ldots, x^n\colon U \to \mathbb{R}$ — *координатные функции* на $U \subset \mathbb{R}^n$. Это значит, что значение функции x^i в точке $a = (a^1, \ldots, a^n) \in U$ равно a^i.

Задача 7. Найдите значения дифференциалов dx^1, $d(x^1x^2)$, $d((x^1)^2 + (x^2)^2)$ на векторах ξ_1, ξ_2, ξ_3 (см. рис.):



Определение. Пространство, сопряженное к $T_{x_0}U$ (т.е. векторное пространство всех линейных функционалов на $T_{x_0}U$) обозначается $T^*_{x_0}U$ и называется *кокасательным пространством* к U в точке x_0.

Задача 8. Докажите, что дифференциалы координатных функций $dx^1(x_0), \ldots, dx^n(x_0)$ образуют базис в $T^*_{x_0}U$. Разложите по нему $df(x_0)$.

Задача 9. Опишите все функции $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие уравнению $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Задача 10. Найдите дифференциалы следующих отображений. По возможности (кроме п. 4с) постарайтесь записать ответы в бескоординатной форме (т.е. так, чтобы в полученных формулах не участвовали координаты точек и векторов).

1) $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x,y)$ (скалярное произведение);
2) $f\colon M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ f(A) = \operatorname{tr} A$ (след матрицы A);
3) $f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = A^{-1}$;
4) $f\colon M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ f(A) = \det A$ (определитель матрицы A).

В п.4) рассмотрите отдельно случаи:

a) $df(E)X$, где E — единичная матрица;
b) $df(A)X$, где A — невырожденная матрица;
c) $df(A)X$, где A — произвольная матрица.