3. Свойства дифференциала. Формула Тейлора

Задача 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, и пусть функции $f_1, f_2\colon U \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в $x_0 \in U$, причем $f_2(x_0) \neq 0$. Докажите, что f_1/f_2 дифференцируема в x_0 и

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x_0) = \frac{f_2(x_0)df_1(x_0) - f_1(x_0)df_2(x_0)}{f_2(x_0)^2}.$$

Обозначение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $x \in U$. Для вектора $\xi \in T_xU$ и дифференцируемой в x функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ будем писать $\xi(f)$ вместо $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x)$ (см. прошлое занятие).

Задача 2. (*второе определение дифференциала*). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества, $\varphi\colon U \to V$ — дифференцируемое отображение. Докажите, что дифференциал φ в точке $x \in U$ — это единственный линейный оператор $L\colon T_xU \to T_{\varphi(x)}V$, удовлетворяющий условию $(L\xi)(f) = \xi(f \circ \varphi)$ для любой дифференцируемой функции $f : V \to \mathbb{R}$.

Задача 3. (*третье определение дифференциала*). Пусть U, V, φ, x — те же, что в предыдущей задаче, $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ — дифференцируемая кривая, $x = \gamma(0)$, $\xi = \gamma'(0)$ — ее вектор скорости. Вектором скорости какой кривой является $d\varphi(x)\xi$? Дайте еще одно определение дифференциала, основанное на этом свойстве.

Определение. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\varphi\colon U \to V$ называется C^p-*диффеоморфизмом*, если оно биективно, $\varphi \in C^p(U)$ и $\varphi^{-1} \in C^p(V)$.

Определение. Пусть $M, U \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества, $\varphi\colon M \to U$ — диффеоморфизм, $(y^1, \ldots, y^n)$ — координатные функции в U. Функции $\tilde{y}^i = y^i \circ \varphi$ называются *криволинейными координатами* в M.

Задача 4. Пусть $(\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^n)$ — криволинейные координаты в открытом множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в точке $x \in M$ функция. Докажите, что $d\tilde{y}^1(x), \ldots, d\tilde{y}^n(x)$ — базис в T_x^*M и разложите $df(x)$ по этому базису; при этом постарайтесь не пользоваться обычными координатами в M.

Задача 5. Выразите в полярных координатах следующие операторы:
1) $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$; **2)** $y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$; **3)** $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа).

Задача 6. *Уравнением колебаний струны* называется следующее уравнение относительно неизвестной функции $u \in C^2(\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

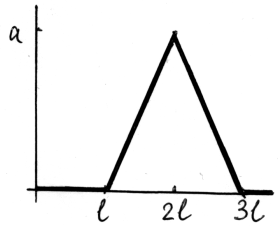
График функции $y(x) = u(x, t)$ при фиксированном t представляет собой профиль струны в момент времени t.
1) Найдите общее решение этого уравнения. (*Указание:* рассмотрите новые координаты $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.)

2) Пусть заданы начальные условия

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u'_t(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

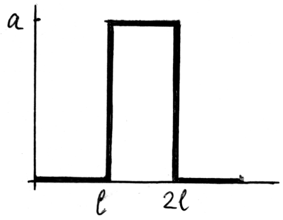
Напишите формулу для решения, заданного этими условиями.

3) (*Струна гитары*). Пусть $v_0 = 0$, а u_0 — функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в моменты времени $t_k = \dfrac{kl}{4a}$ $(k = 0, \dots, 5)$.

4) (*Струна рояля*). Пусть $u_0 = 0$, а v_0 — функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в моменты времени $t_k = \dfrac{kl}{4a}$ $(k = 0, \dots, 5)$.

Задача 7. Докажите, что если $f \in C^k(U)$, то все ее частные производные до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 8. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $f \in C^N(U)$. Приведите подобные члены в формуле Тейлора (см. лекцию) и докажите, что ее можно записать в следующем виде:

$$f(x+h) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n \leqslant N}} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}} (h^1)^{\alpha_1} \dots (h^n)^{\alpha_n} + o(\|h\|^N)$$

при $h \to 0$. (Здесь $\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел.)

Замечание. Наборы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ называются *мультииндексами*. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, то полагают по определению

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad h^\alpha = (h^1)^{\alpha_1} \dots (h^n)^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

В мультииндексных обозначениях формула Тейлора приобретает более обозримый вид:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha + o(\|h\|^N) \quad (h \to 0).$$

Задача 9. Пусть $f \in C^N(U)$ и $f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha h^\alpha + o(\|h\|^N)$ при $h \to 0$ в некоторой окрестности x. Докажите, что $c_\alpha = \dfrac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}$.

Задача 10. Найдите $\dfrac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.