4. Экстремум. Теорема о неявной функции

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f \in C^2(U)$ и $x \in U$. *Гессианом* f в x называется квадратичная форма

$$H_f(x)\colon T_xU \to \mathbb{R}, \quad H_f(x)h = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i(h) dx^j(h).$$

Задача 1. Пусть $df(x) = 0$. Может ли f иметь экстремум в x, если $H_f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения?

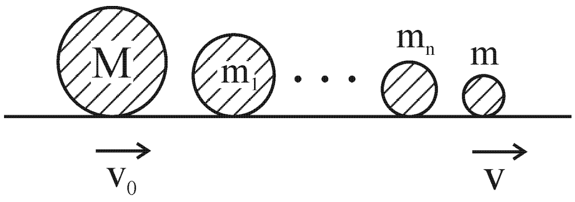
Задача 2. Как меняется $H_f(x)$ при замене декартовых координат на криволинейные?

Задача 3. Можно ли исследовать функцию на экстремум в криволинейных координатах по тому же рецепту, что и в декартовых?

Задача 4. Даны функции: **1)** $f(x,y) = -y^2 + x^2 - x^4$; **2)** $f(x,y) = \cos x - y^2$. Нарисуйте их линии уровня (т.е. множества $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$) и графики. Найдите их экстремумы.

Задача 5. Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть ее ограничение на любую прямую, проходящую через $x_0 \in \mathbb{R}^2$, имеет максимум в x_0. Верно ли, что x_0 — точка максимума функции f?

Задача 6. (*Задача Гюйгенса*). Известно (легко выводится из законов сохранения энергии и импульса), что при соударении шара массы M, имеющего скорость v_0, и неподвижного шара массы m последний приобретает скорость $\dfrac{2Mv_0}{m+M}$. При заданных M, m и v_0 подберите массы $m_1, \ldots, m_n$ промежуточных шаров (см. рис.) так чтобы скорость последнего шара оказалась максимальной. Что произойдет при увеличении числа шаров n?



Задача 7. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть $F \in C^2(U)$ такова, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности (x_0, y_0) (см. лекцию). Выразите $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

Задача 8. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$. $F \in C^1(U)$, и частные производные F не обращаются в нуль в некоторой точке. Пусть $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$, $z = z(x,y)$ — функции, неявно заданные уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial z} \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Пусть $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ — семейство кривых на плоскости, заданных неявно: $\gamma_t = \{(x,y) : f_t(x,y) = 0\}$, где f_t — гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t. Предположим, что функция $f(t,x,y) = f_t(x,y)$ также гладкая, и положим $M = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : f(t,x,y) = 0\}$. Обозначим через π проекцию $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(t,x,y) \mapsto (x,y)$.

Определение. *Огибающей* семейства $\{\gamma_t\}$ называется множество $E \subset \mathbb{R}^2$, являющееся образом при проекции π тех точек из M, в которых касательная плоскость T_xM (см. лекцию) содержит прямую, параллельную оси Ot.

Следующая задача показывает, как искать огибающие.

Задача 9. Докажите, что $E = \big\{(x, y) : \exists t \in I : \ f(t, x, y) = \dfrac{\partial}{\partial t} f(t, x, y) = 0\big\}$.

А следующая задача объясняет, почему огибающая так называется.

Задача 10. Пусть $I_0 \subset I$ и $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, касающаяся γ_t в точке $\varphi(t)$ для всех t. Докажите, что $\varphi(I_0) \subset E$.

Задача 11. Найдите огибающую семейства отрезков постоянной длины ℓ с концами на положительных координатных полуосях.

Задача 12. (*Кривая безопасности*). Найдите границу зоны досягаемости снаряда при стрельбе из артиллерийского орудия с постоянной начальной скоростью снаряда v_0 под произвольными углами к горизонту.