5. Теорема о неявном отображении

Задача 1. Выведите теорему о неявном отображении из теоремы об обратном отображении.

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. *Рангом* дифференцируемого отображения $f\colon U \to V$ в точке $x \in U$ называется ранг его дифференциала в этой точке: $\mathrm{rk}_x f = \mathrm{rk}\, df(x)$. Точка x называется *критической* для f, если $\mathrm{rk}_x f$ не максимален, т.е. меньше, чем $\min\{m, n\}$.

Задача 2. Докажите, что множество критических точек отображения $f \in C^1(U)$ замкнуто.

Задача 3. Для указанных отображений $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ найдите критические точки и образ множества этих точек при отображении f. Для каждой критической точки x найдите и нарисуйте $\mathrm{Ker}\, df(x)$. Найдите число прообразов каждой точки $y \in \mathbb{R}^2$.
1) $(x, y) \mapsto (x^2, y)$, **2)** $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$, **3)** $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$,
4) $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, **5)** $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$.

Задача 4. Докажите эквивалентность следующих свойств подмножества $M \subset \mathbb{R}^N$, где $N = n + m$.
1) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$ класса C^p такие, что $U \cap M = \{y : F(y) = 0\}$ и $\mathrm{rk}_x F = m$.
2) Для любой точки $x \in M$ можно так перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^N$, что найдутся окрестность $U \ni x$ вида $U = I \times J$ (где $I \subset \mathbb{R}^n$ и $J \subset \mathbb{R}^m$ открыты) и отображение $f : I \to J$ класса C^p такие, что $M \cap U = \Gamma_f$ (здесь Γ_f — это график f).
3) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и криволинейные координаты $y^1, \ldots, y^N$ класса C^p в U такие, что $M \cap U = \{y : y^{n+1} = \ldots = y^N = 0\}$.
4) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $\varphi\colon V \to U$ класса C^p такие, что $\mathrm{rk}\,\varphi = n$, $M \cap U = \varphi(V)$, и $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ – гомеоморфизм (то есть существует и непрерывно отображение $\varphi^{-1}\colon \varphi(V) \to V$).

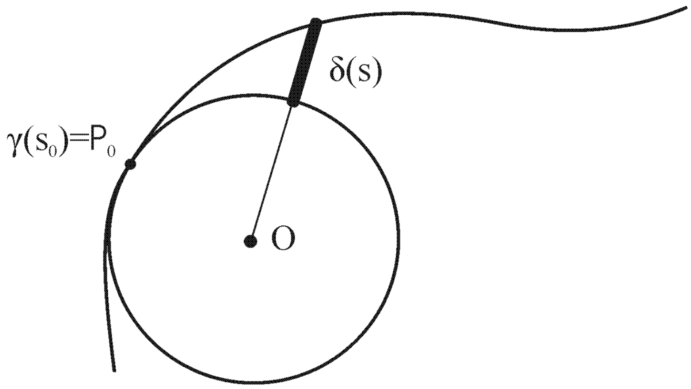
Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее условиям предыдущей задачи, называется *подмногообразием* в $\mathbb{R}^N$ размерности n.

Задача 5. Являются ли следующие множества подмногообразиями? Найдите их размерности.
1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$;
2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$;
3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = a\}$;
4) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$;
5) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$;
6) $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$;
7) $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T = A^{-1}\}$.

Задача 6. Пусть $\{\gamma_t\}_{t\in I}$ — семейство кривых на плоскости, заданных неявно: $\gamma_t = \{(x,y) : f_t(x,y) = 0\}$, где f_t — гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t и функция $f(t,x,y) = f_t(x,y)$ также гладкая. Предположим, что для каждого $t \in I$ кривая γ_t представима в виде $\gamma_t = \{\gamma(t,s) : s \in J\}$, где $\gamma\colon I \times J \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение. Докажите, что огибающая E семейства γ_t (см. прошлое занятие) совпадает с образом множества критических точек при отображении γ.

Задача 7. Решите задачи 11 и 12 из предыдущего листка с помощью задачи 6.

Определение. (см. также прошлый семестр). Пусть $\Gamma = \{\gamma(s) : s \in I\}$ — гладкая кривая с натуральной параметризацией (т.е. $\|\dot\gamma(s)\| = 1$ для всех s). Говорят, что некоторая окружность *соприкасается* с Γ в точке $P_0 = \gamma(s_0)$, если $\delta(s) = o(s-s_0)^2$ при $s \to s_0$ (см. рис.). *Эволютой* Γ называется множество центров соприкасающихся с нею окружностей.



Задача 8. Пусть $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in I\}$ — произвольно параметризованная гладкая кривая, $O \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t)$ — квадрат расстояния от O до $\gamma(t)$. Докажите, что O — центр соприкасающейся с Γ в точке $P_0 = \gamma(t_0)$ окружности тогда и только тогда, когда $\varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$.

Задача 9. Докажите, что эволюта кривой совпадает с огибающей семейства ее нормалей.

Задача 10. Найдите эволюту эллипса и параболы.